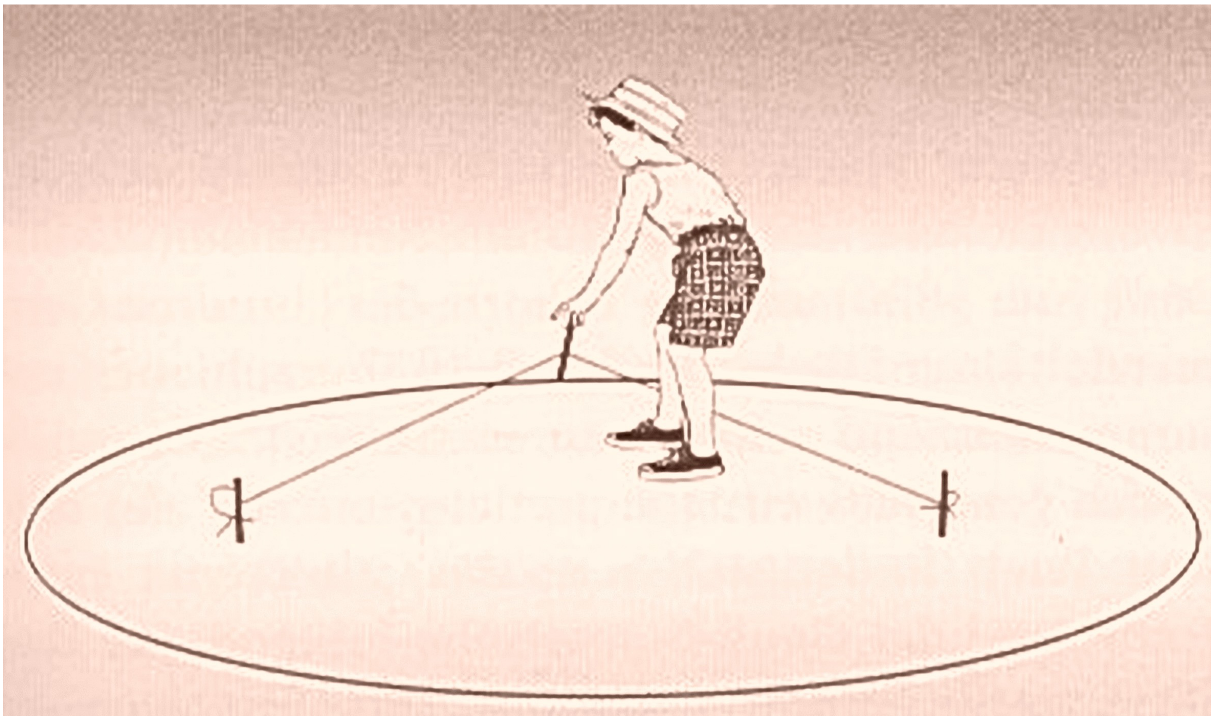
Die Ellipse

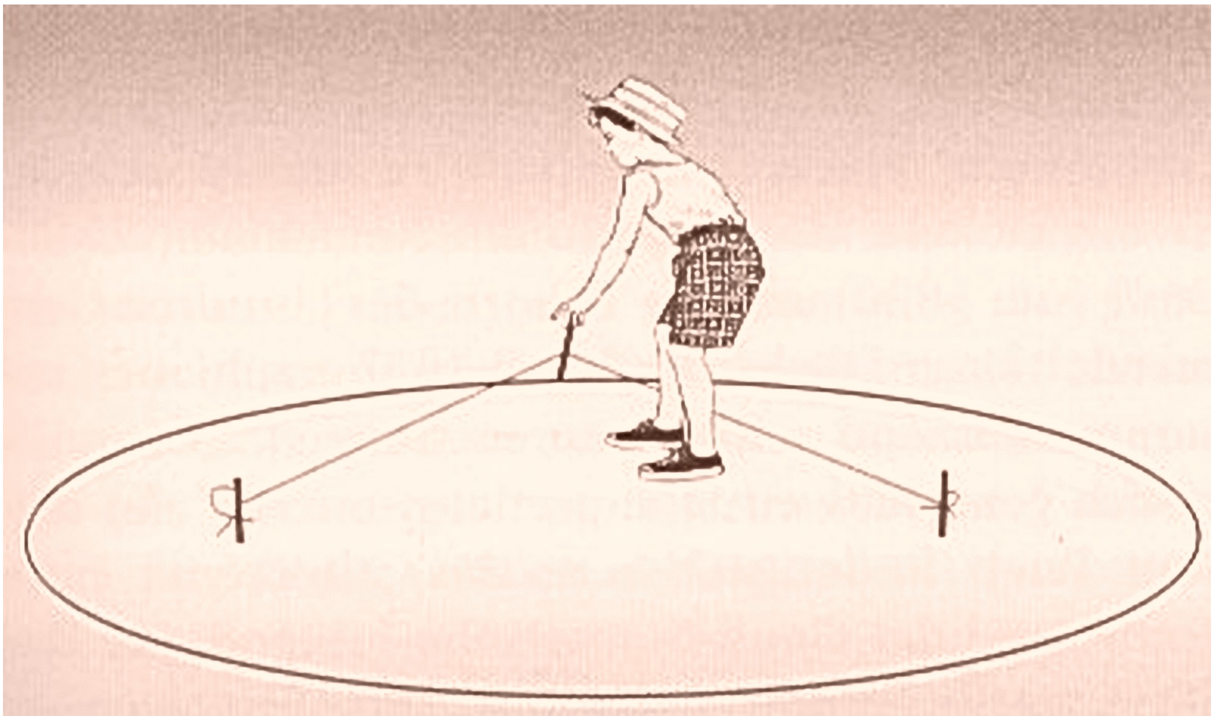


Das Spiel mit der Exzentrizität

Markus Wurster

Die Ellipse

Die Ellipse



Das Spiel mit der Exzentrizität

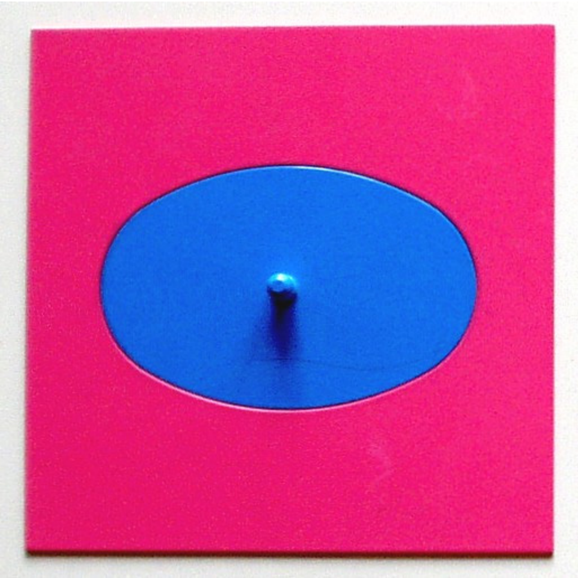
Markus Wurster

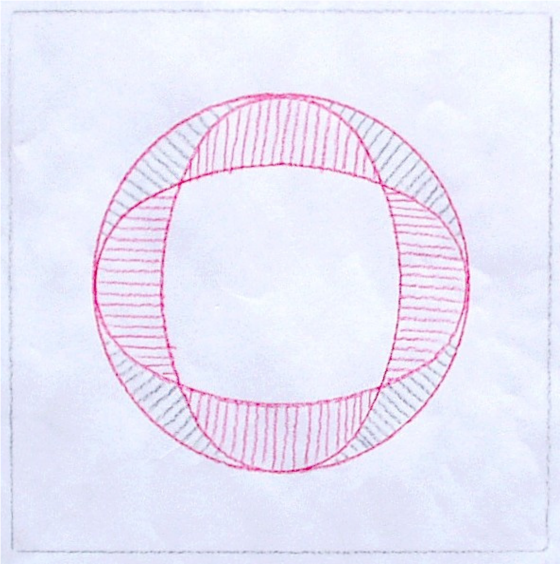
Inhalt

MarkusWurster@gmx.de

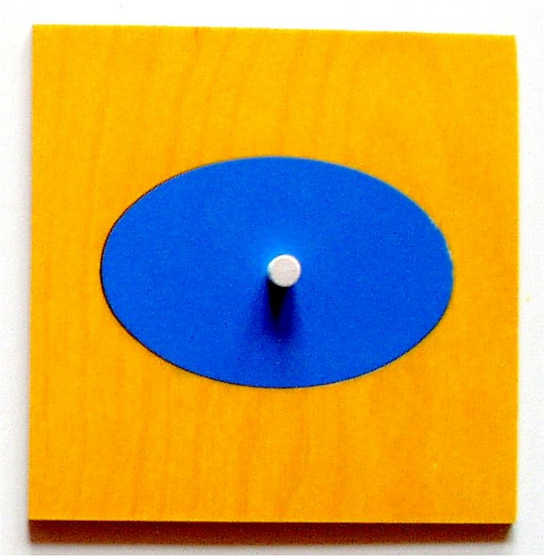
Die Ellipse – eine geometrische Grundform

Weißt du, was eine Ellipse ist? Bestimmt kennst du im Klassenzimmer die Metallenen Einsatzfiguren. Eine Form davon ist eine Ellipse. Vielleicht hast du schon eigene Muster damit entworfen.





In der Geometrischen Kommode gibt es ebenfalls eine Ellipse.



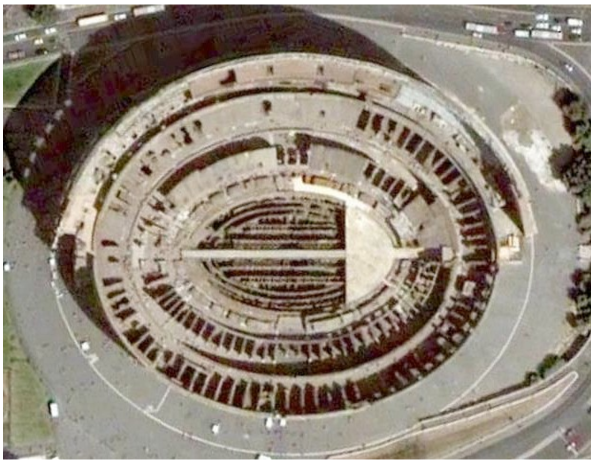
Es ist eine wundervolle Form. Schon immer haben Künstler und Architekten die Ellipse für besondere Anlässe gewählt – zum Beispiel für Bilderrahmen, Schmuck, Gebäude und Parkanlagen.

Rembrandt
Selbstbildnis, 1632

Königin Luise (Preußen)
auf einer Brosche

Brosche mit Opal

Das Kolosseum in Rom (Modell)



Vom Satelliten aus fotografiert (Google Earth)

Der Petersplatz im Vatikan (Rom)

Vom Satelliten aus fotografiert (Google Earth)

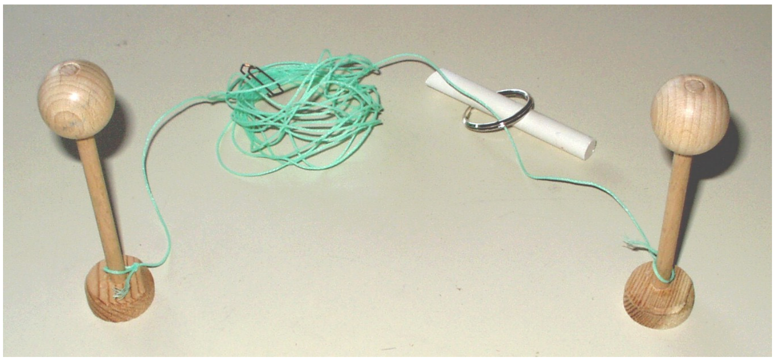
Die berühmte Park-Ellipse vor dem Weißen Haus in Washington (vom Satelliten aus fotografiert – Google Earth)

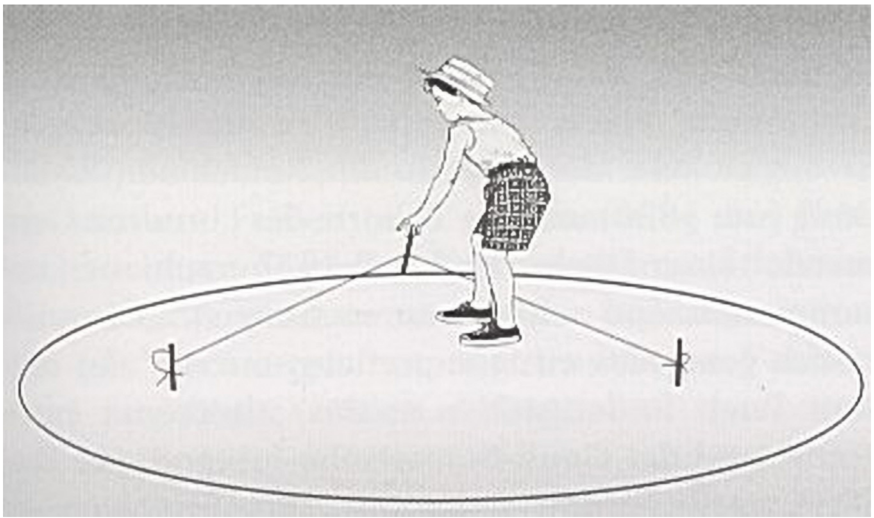
In manchen Kindergärten und Schulen gehen Kinder auf einer Linie. Das ist eine sehr konzentrierte und beruhigende Übung.

Die Linie auf dem Boden ist meistens eine Ellipse. Aber oft sieht sie leider aus wie ein etwas missratener Kreis – oder gar noch schlimmer – wie eine Kartoffel. Probiere mal auf einem Blatt, eine Ellipse zu zeichnen. Freihändig ist das wirklich nicht so einfach. Wie kann man dann eine vollkommene, perfekte Ellipse erhalten? Es geht tatsächlich – und dabei ist es so einfach, dass man alleine bei Zuschauen staunen und Freude empfinden kann.

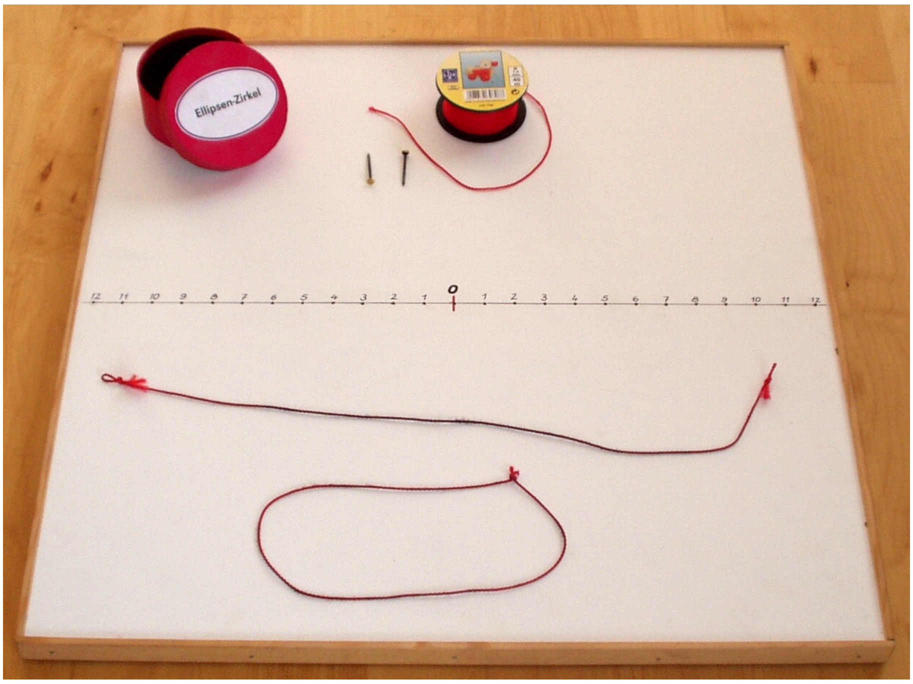
Eine Ellipse konstruieren

Du brauchst einen Ellipsenzirkel wie auf dem Bild. Am besten geht es, wenn ein solcher Zirkel schon vorbereitet ist: Eine Schnur mit Ring, zwei Ständerchen und Kreide. Und du brauchst zwei Helfer, die die Pflöcke festhalten, denn wir wollen ja schließlich im Klassenzimmer keine Pflöcke in den Boden schlagen!





Jetzt kannst du auch ganz alleine mit Ellipsen experimentieren: Hole dir den "Ellipsenzirkel – Das Spiel mit der Exzentrizität" und lasse dich von deiner Lehrerin / deinem Lehrer einführen.



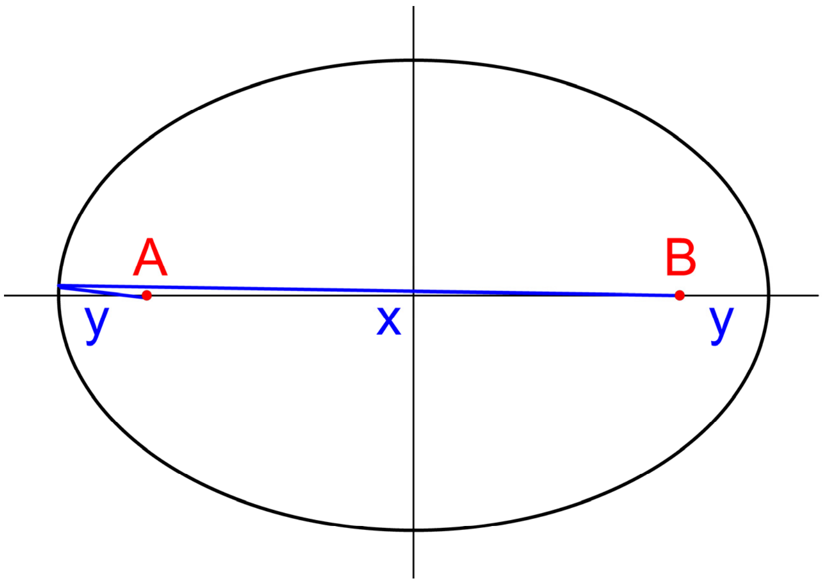
✐ Experimentiere mit einer offenen (nicht zusammengebundenen) Schnur.
Verändere die Abstände der beiden Nägel.
Was stellst du fest?

Wenn du immer dieselbe Schnur verwendet hast, sind alle Ellipsen gleich lang. Aber die Breite hat sich verändert. Je größer der Abstand der Nägel ist, desto schmaler wird die Ellipse.
Stelle dir vor, du vergrößerst den Abstand immer mehr, bis die Schnur schließlich ganz gespannt ist. Wie sieht die Ellipse dann aus?
Sie ist nur noch eine gerade Linie.
Und was ist, wenn man den Abstand immer weiter verringert, bis die beiden Nägel schließlich aufeinander sitzen?
Nun ist die Ellipse ein Kreis.

Jetzt können wir schon festhalten:

> ***Eine Ellipse ist immer so lang, wie die Schnur lang ist, egal wo sich die Nägel befinden.***

Überprüfe das an der folgenden Zeichnung!

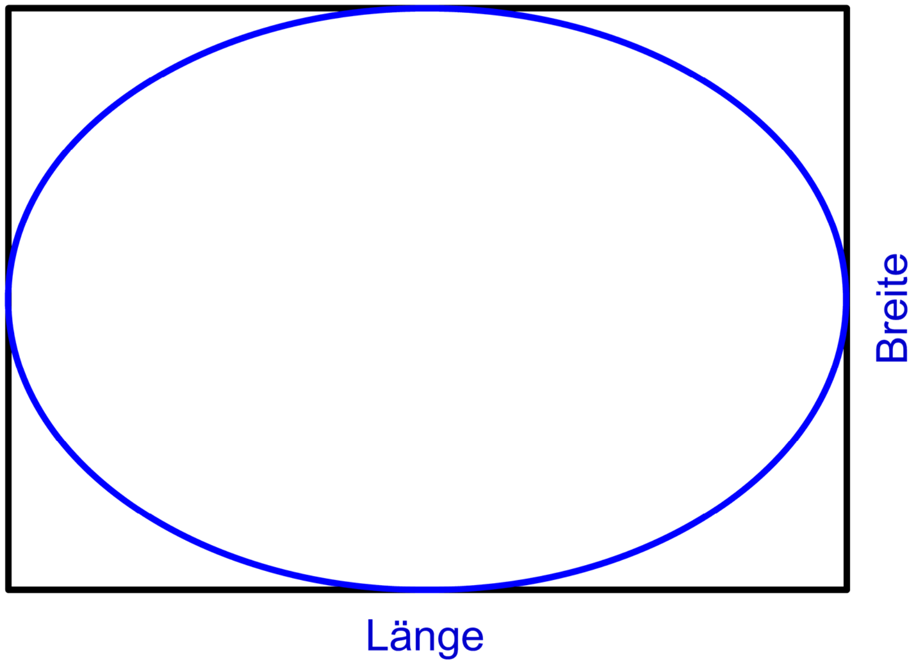


Wir spannen die Schnur auf der Längsachse.
Der Abstand zwischen den Nagel-Punkten und der Ellipse ist auf beiden Seiten gleich, nämlich y. Die Schnur hat die Länge x (zwischen den Nägeln) plus zwei Mal y.

$$Schnurlänge\ l = x + y + y$$

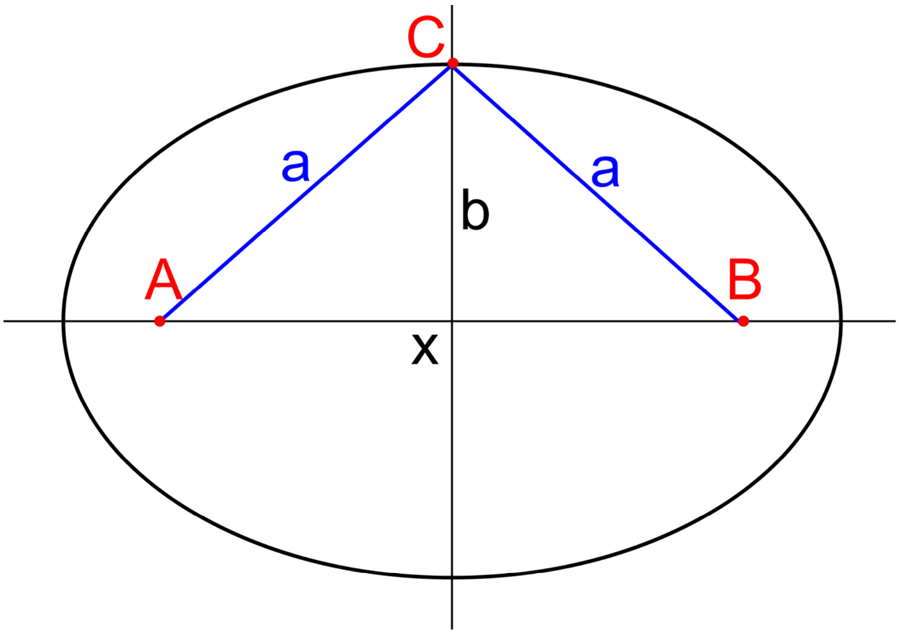
Eine Ellipse mit genauen Maßen

Das war ganz einfach. Aber jetzt wird es schwieriger! Stell dir vor, wir haben für unsere Ellipse auf dem Boden im Klassenzimmer nur einen ganz genau begrenzten Platz. Die Ellipse soll als eine ganz bestimmte Länge und eine ganz bestimmte Breite haben.
Die Schnur muss dann so lang sein, wie die Ellipse lang werden soll. Das wissen wir nun schon. Aber wie bekomme ich die bestimmte Breite?



Beim Experimentieren mit dem Ellipsenzirkel hast du gesehen, dass die Breite dadurch bestimmt wird, wie weit die Nägel auseinander sind. Wie groß muss also der Abstand der Nägel sein? Wir wollen herausfinden, wo die Punkte A und B sein müssen.

Jetzt brauchst du viel Vorstellungskraft. Stelle dir vor, wir zeichnen die Ellipse an dem Punkt, wo sie am breitesten ist. Diesen Punkt nennen wir C.



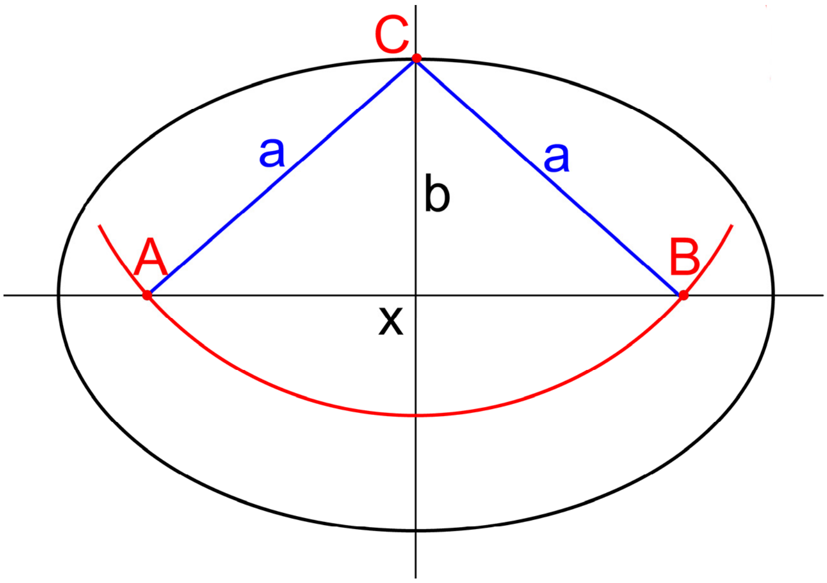
Hier sind die beiden gespannten Schnurstücke a gleich lang, nicht wahr? Und zwar genau die Hälfte der ganzen Schnur.

Das wissen wir bis jetzt:

- Wir haben das Achsenkreuz.
- Wir wissen, wie lang die Ellipse werden soll. So lang ist auch unsere Schnur.
- Auf der kurzen Achse liegt unser Punkt C.
- Auf der langen Achse liegen irgendwo die Punkte A und B, aber wo?
- Wir wissen, dass a die Hälfte der Schnurlänge ist.

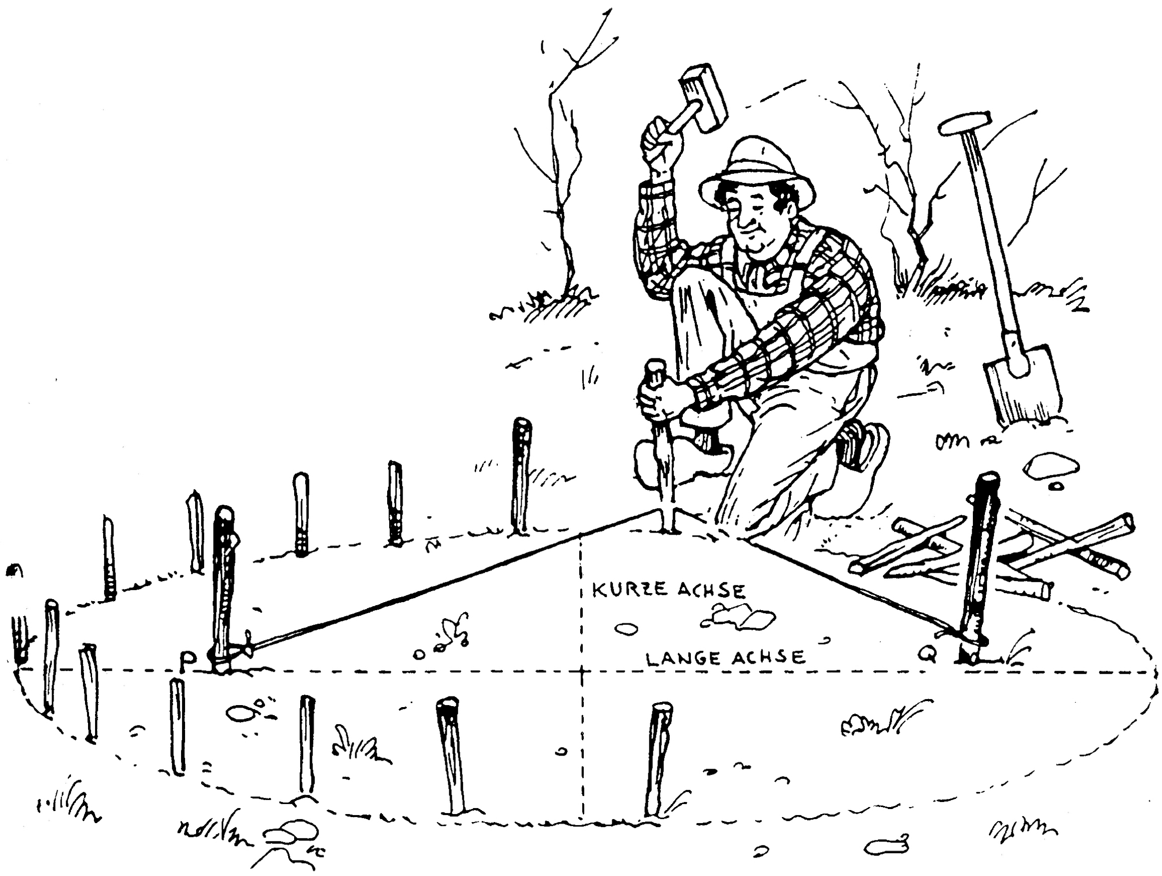
Um herauszufinden, wo genau die Punkte A und B liegen, gehen wir folgendermaßen vor:

- Wir nehmen die Schnur und legen sie zur Hälfte zusammen.
- Mit dieser gefalteten Schnur ziehen wir einen Kreis um C.
- So erhalten wir die Schnittpunkte A und B auf der Längsachse.



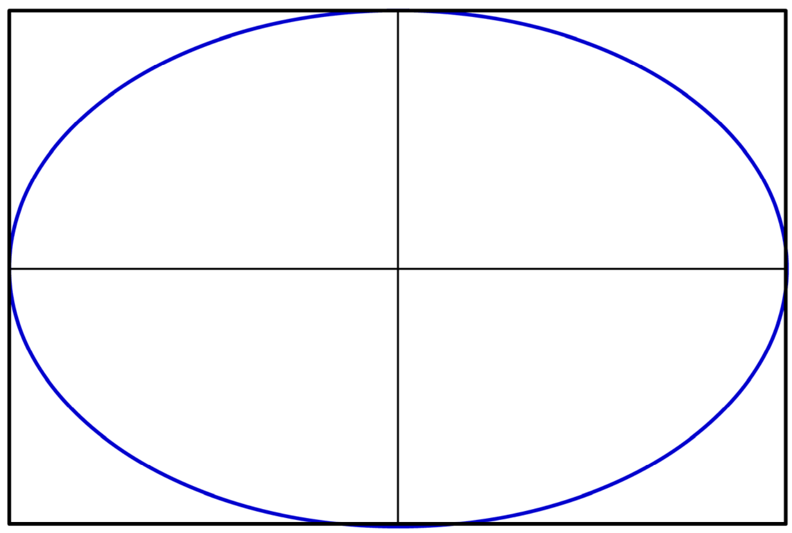
Und so haben wir alles, was wir für die ganz bestimmte Ellipse brauchen.

✐ Du könntest jetzt auf den Schulhof oder den Rasen gehen und wie ein Gärtner ein elliptisches Blumenbeet zeichnen. Man nennt diese Methode, eine Ellipse zu konstruieren, die *Gärtnerkonstruktion*.

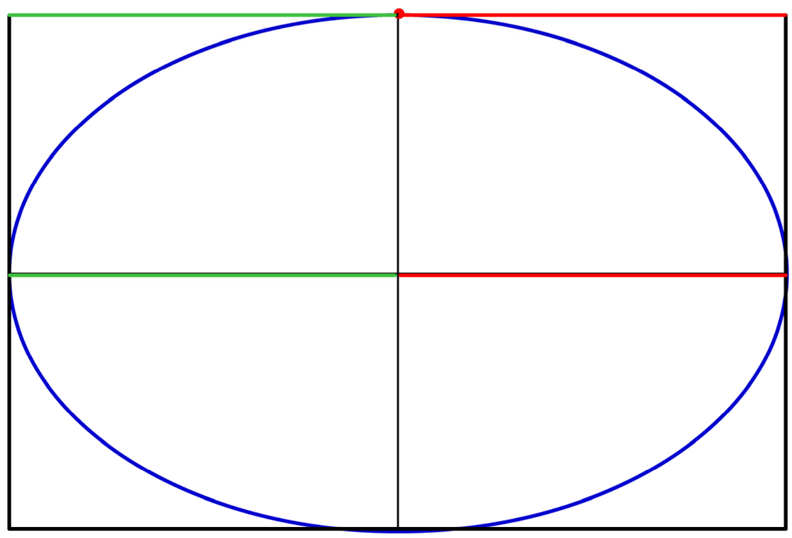


Ganz ohne Zirkel

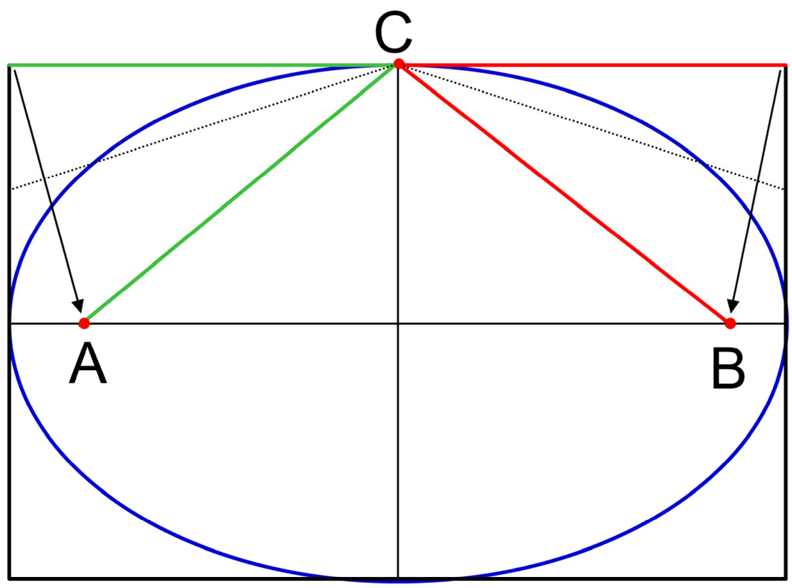
Man kann auch ganz ohne Zirkel eine bestimmte Ellipse konstruieren. Stelle dir vor, du hast ein beliebiges Rechteck aus Papier und willst nun eine Ellipse, die genau auf dieses Rechteck passt.



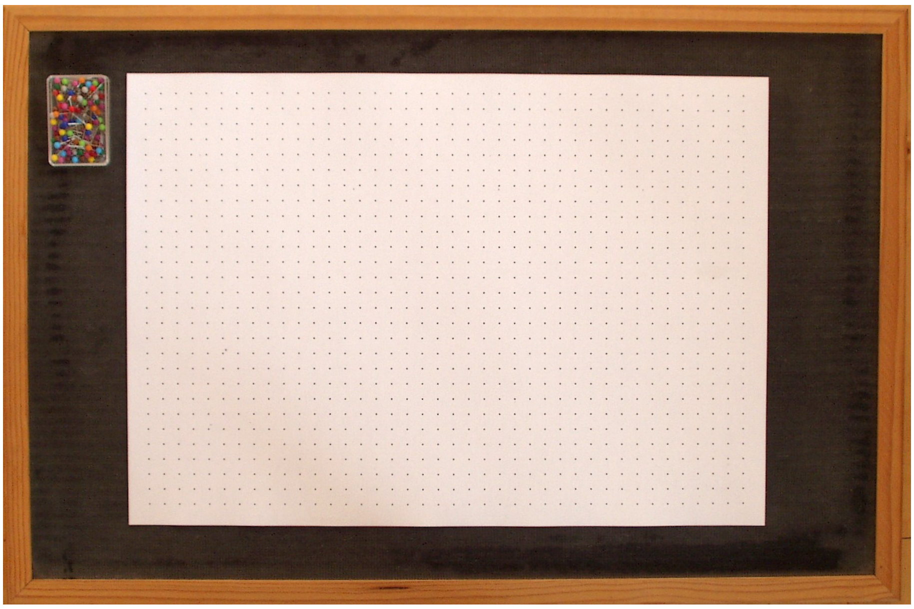
Falte es zweimal in der Mitte für die beiden Achsen.
Die halbe Länge der Ellipse (grün und rot) gibt es auch am oberen Rand des Rechtecks.



Knicke die Ecken des Rechtecks so nach innen, dass die grüne und rote Linie mit der Spitze die Längsachse berührt. Diese Berührungspunkte sind die Nagelpunkte der Ellipse.



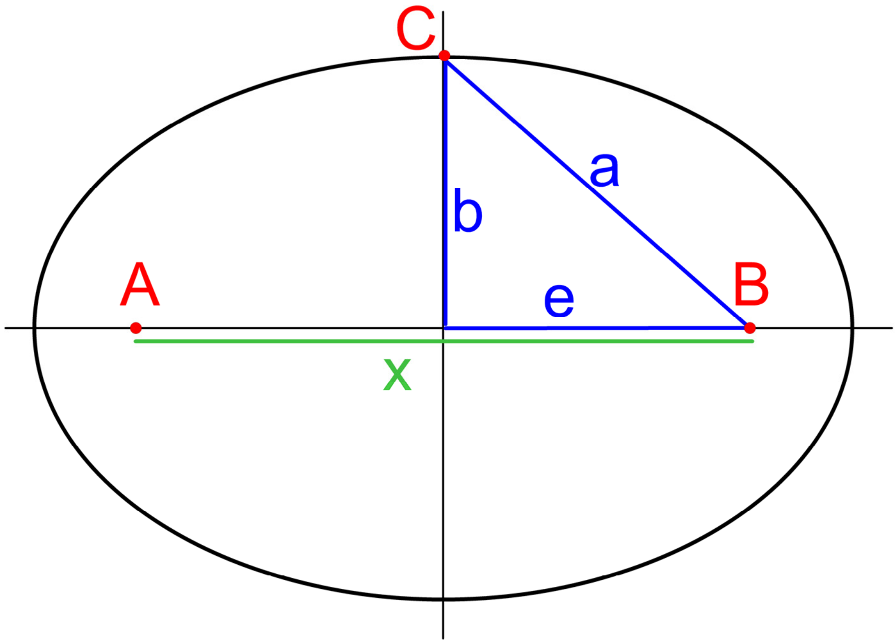
Hole dir nun das Geometrie-Steckbrett.
Stecke in A und B eine Nadel, Spanne einen Faden... Alles Weitere kennst du schon.



✐ Mache Versuche mit verschiedenen Ausgangs-Rechtecken.

Die Ellipse berechnen

Wenn du schon den Satz des Pythagoras kennst, kannst du die Ellipse auch berechnen:
Dazu betrachten wir das rechtwinklige Dreieck in der Ellipse.



Hier gilt:

$$a^2 = b^2 + e^2$$

$$e^2 = a^2 - b^2$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Entsprechend gilt für den Abstand x bei einer bestimmten Länge und Breite der Ellipse:

$$x = \sqrt{Länge^2 - Breite^2}$$

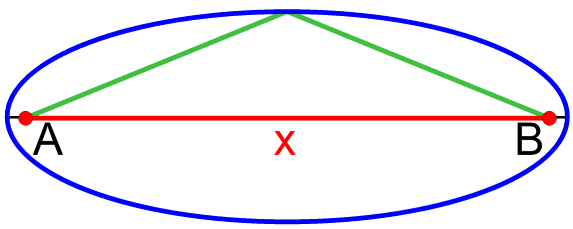
✐ Konstruiere Ellipsen mit Hilfe dieser Formel.

Die Exzentrizität

Wir haben unterschiedliche Ellipsen konstruiert – mehr oder weniger abgeflachte. Es gibt einen Fachbegriff für diese Abflachung. Die Mathematiker nennen es die *Exzentrizität* einer Ellipse. Diesen Begriff kann man gut erklären: „Ex“ heißt so viel wie „außerhalb“. „Zentrisch“ bedeutet „im Mittelpunkt“. „Exzentrisch“ bedeutet also „außerhalb des Mittelpunktes“. Die *Exzentrizität* beschreibt demnach, wie weit die Brennpunkte vom Mittelpunkt entfernt sind, oder, einfach ausgedrückt, wie stark die Ellipse von der Kreisform abweicht.
Eine kreisähnliche Ellipse hat eine geringe Exzentrizität.
Eine stark abgeflachte Ellipse hat eine hohe Exzentrizität.
Und wir haben herausgefunden, dass die Exzentrizität einer Ellipse nur vom Abstand der beiden Brennpunkte (so nennt man die „Nagelpunkte“) abhängt.

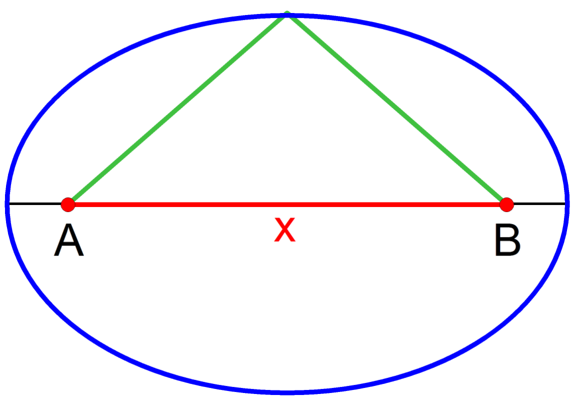
Es gibt auch ein Maß für die Exzentrizität. Man ermittelt das Verhältnis vom Abstand der Brennpunkte (hier „x“ genannt) zur Gesamtlänge (l):

$\varepsilon = x : l$ (ε ist der griechische Buchstabe Epsilon)



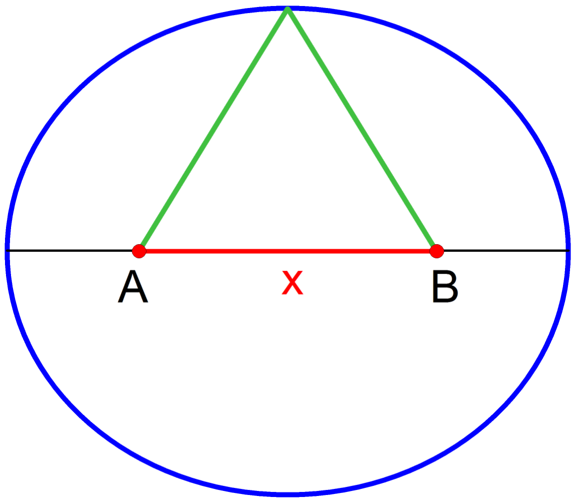
Der Abstand der Brennpunkte ist annähernd so groß wie die Gesamtlänge l:

$\varepsilon = 0{,}9$



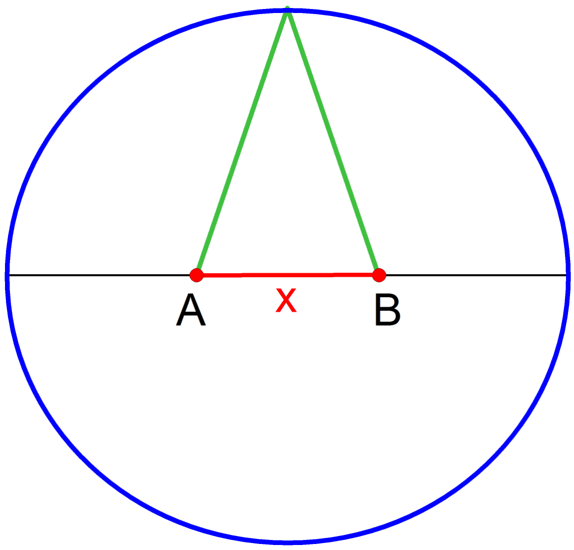
Der Abstand der Brennpunkte beträgt etwa drei Viertel von der Gesamtlänge:

$\varepsilon = 0{,}7$



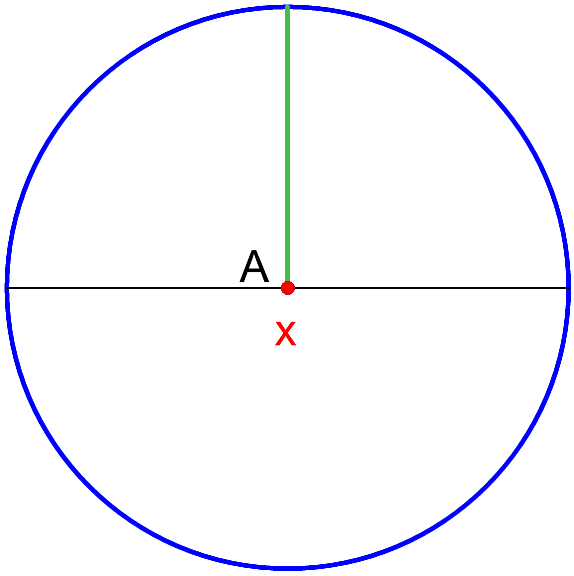
Der Abstand der Brennpunkte beträgt etwa die Hälfte der Gesamtlänge:

$\varepsilon = 0{,}5$



Der Abstand der Brennpunkte beträgt etwa ein Drittel der Gesamtlänge:

$\varepsilon = 0{,}3$



Der Abstand der beiden Brennpunkte beträgt 0:

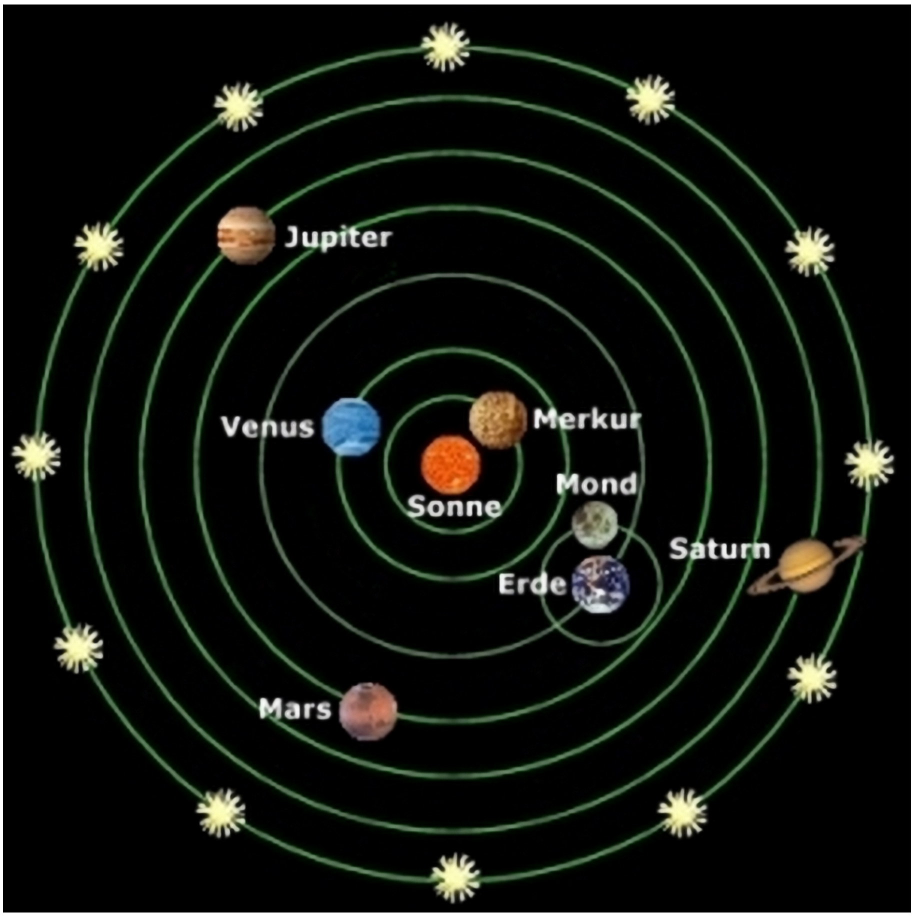
$\varepsilon = 0$

Diese Sonderform einer Ellipse ist – ein Kreis.

Die Exzentrizität einer Ellipse liegt also immer zwischen 0 und 1.

✐ Konstruiere Ellipsen mit verschiedenen Exzentrizitäts-Werten.

Ellipsen in der Astronomie

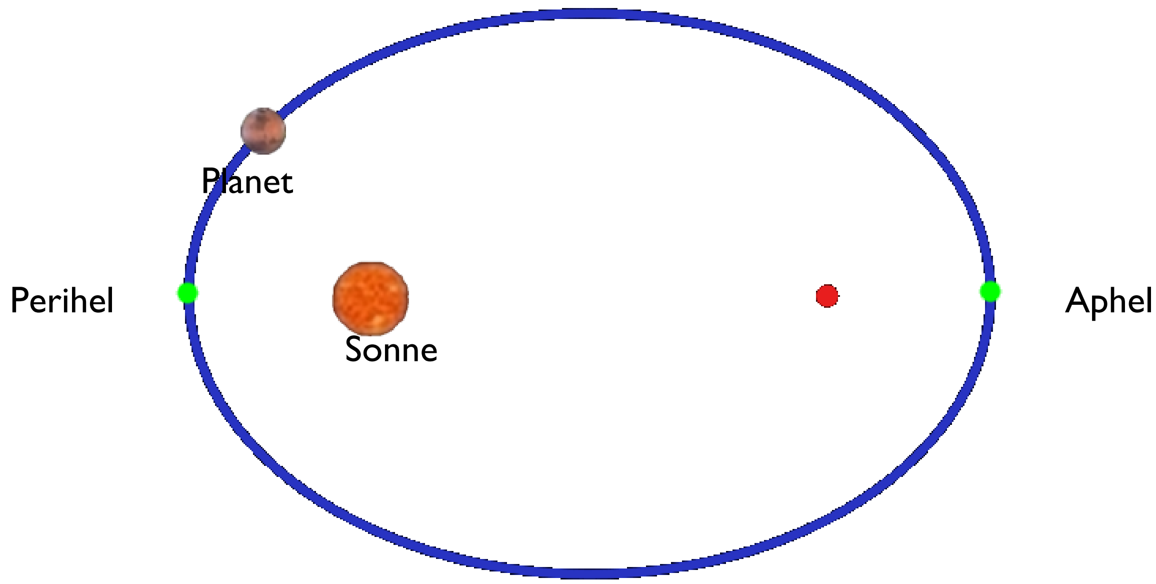


Nikolaus Kopernikus dachte sich im 16. Jahrhundert unser Planetensystem so, dass die Sonne im Mittelpunkt steht und die Planeten auf vollkommenen Kreisbahnen um die Sonne wandern.

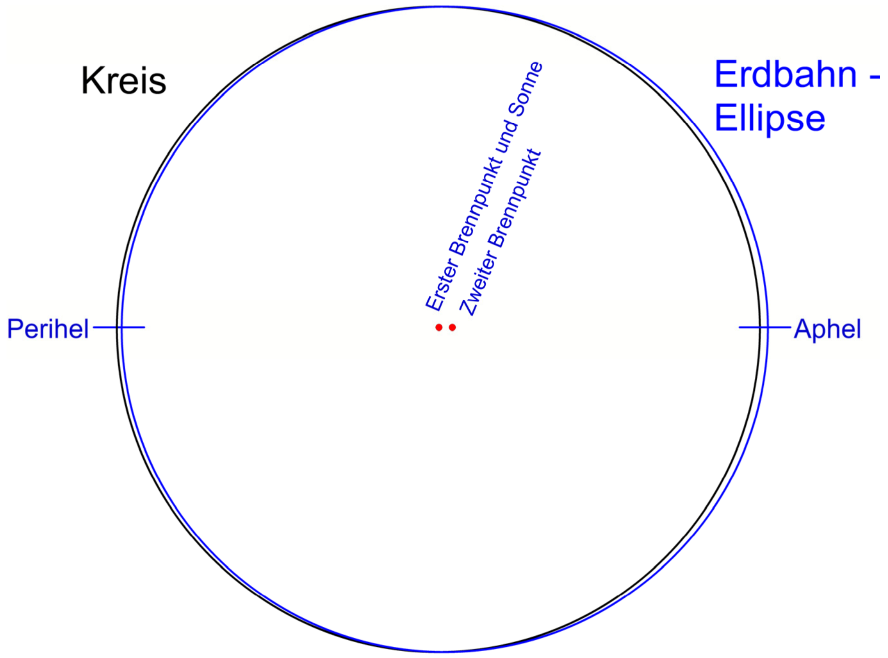
Johannes Kepler erkannte 1609 beim Beobachten der Marsbahn, dass die Planetenbahnen keine genauen Kreisbahnen sein konnten. Er fand heraus, dass es sich um elliptische Bahnen handeln muss: Das erste Keplersche Gesetz oder der *Ellipsensatz*. Ein Planet bewegt sich also auf einer Ellipsenbahn. In einem Brennpunkt der Ellipse befindet sich die schwere Sonne.

Das ist gar nicht so leicht sich vorzustellen, denn man fragt sich doch unwillkürlich, was dann im zweiten Brennpunkt vorhanden ist. Dort ist aber nichts. Das Zusammenspiel von Sonne und Planet dreht sich nur um einen Brennpunkt.

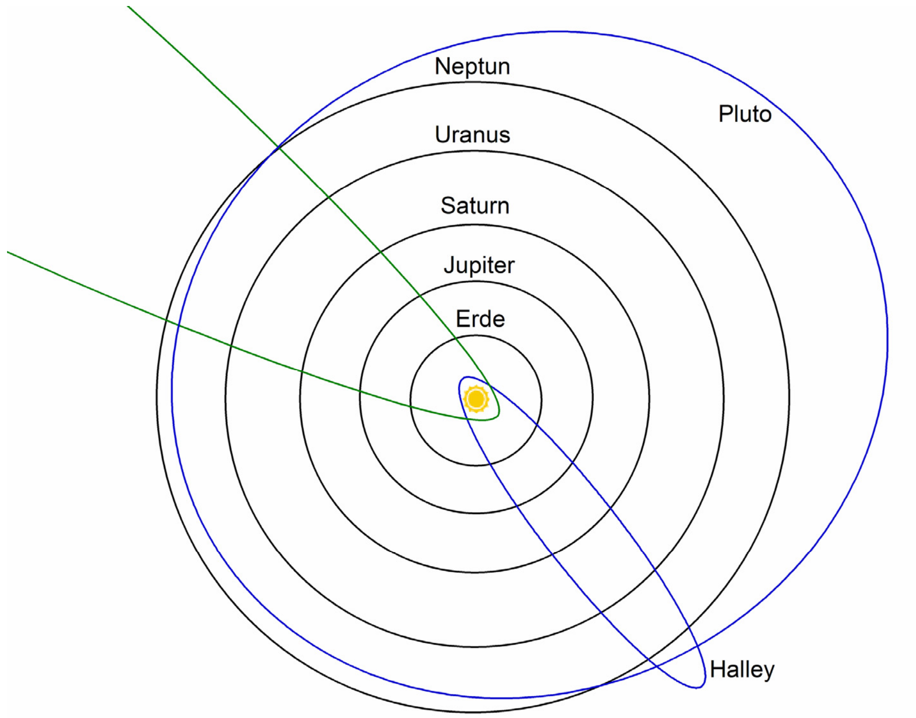
Der Punkt, an dem sich Planet und Sonne am nächsten stehen, nennt man *Perihel*. Der sonnenfernste Punkt heißt *Aphel*.
(Von *Perihel* und *Aphel* spricht man nur in der Astronomie. Allgemein nennt man diese beiden Punkte der Ellipse *Scheitelpunkte*.)



Allerdings muss man sich klar machen, dass nur die Kleinplaneten und die Planetoiden eine deutliche Ellipsenbahn aufweisen. Die Erdbahn hat eine Exzentrizität von nur 0,0167. Das heißt, die Brennpunkte weichen nur eine Winzigkeit vom Mittelpunkt eines Kreises ab. Die Ellipse ist mit dem Auge fast nicht von einem Kreis zu unterscheiden.



Anders ist es bei Pluto mit ε = 0,25. Manche Kometen haben sogar ganz extrem elliptische Bahnen, zum Beispiel der Komet Halley mit ε = 0,97.
Auf seiner Bahn kommt er der Sonne sehr nahe und entfernt sich auch wieder sehr weit von ihr.

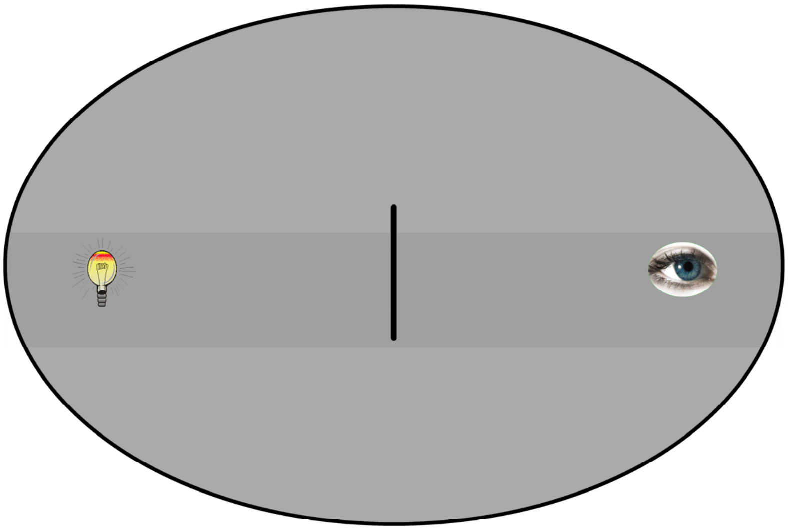


Auf dem Bild ist auch noch eine grüne Kometenbahn eingezeichnet. Sie ist keine geschlossene Kurve. Der Komet kommt von sehr weit aus den Tiefen des Alls, kurvt um die Sonne und verschwindet wieder für immer. So eine Kurve nennt man Parabel.

Aber verlassen wir nun die Weiten des Weltraums und kehren zur Erde zurück. Ein nächstes Gedankenexperiment wartet auf uns. Es geht um die geheimnisvollen Brennpunkte der Ellipse. Was hat es damit auf sich?

Die Brennpunkte

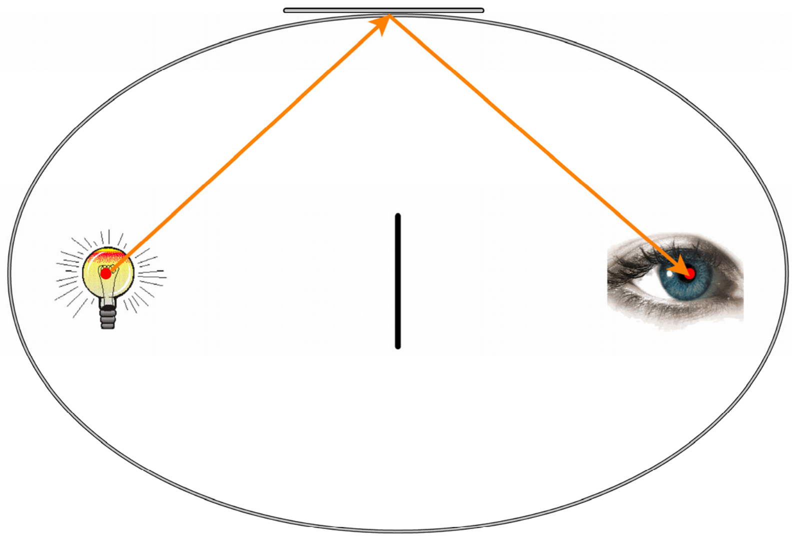
Stelle dir vor, du befindest dich in einem Raum, dessen Wände wie eine Ellipse geformt sind. Die Wände sind schwarz. Du sitzt genau an der Stelle, wo einer der beiden Brennpunkte der Ellipse ist. Genau im zweiten Brennpunkt gegenüber leuchtet eine Glühbirne. In der Mitte des Raumes steht eine kleine Trennwand.



Was siehst du?

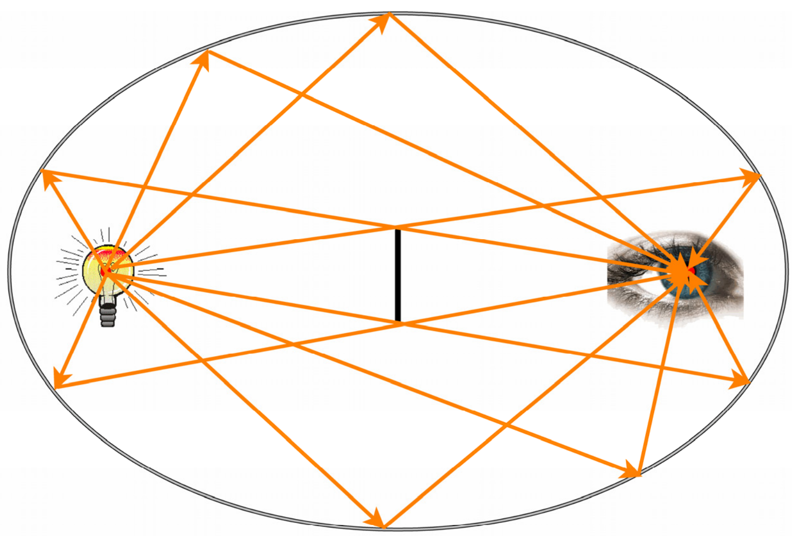
Die Lampe kannst du nicht sehen, sie ist von der Trennwand verdeckt. Die schwarzen Wände verschlucken das Licht. Du empfindest wahrscheinlich nur einen schwachen Lichtschimmer im Raum.

Jetzt verändern wir den Versuch. Stell dir vor, die gebogenen Wände bestünden aus Spiegelglas. Was siehst du?

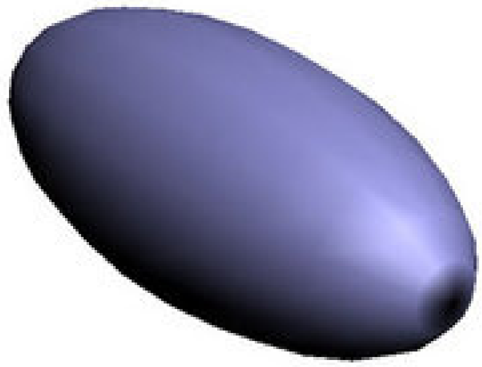


Der Lichtstrahl wird von der Ellipsenwand gespiegelt, gerade so, als ob an der Wand ein ebener Spiegel hängen würde. Die Strahlen verlaufen so wie wir die Schnur bei der Gärtnerkonstruktion gespannt hatten.
Also kannst du die Glühbirne direkt sehen, trotz der Abschirmung in der Mitte.

Es wird noch interessanter: Man kann sich bei der Ellipse beliebige Strahlen vorstellen, die von der Lampe ausgehen. Alle spiegeln sich so an der Wand, dass sie alle wieder im zweiten Brennpunkt zusammentreffen!



Du würdest also von jeder Richtung das Licht der Lampe sehen, so als würde sie dich direkt anstrahlen, egal wohin du dich drehst.

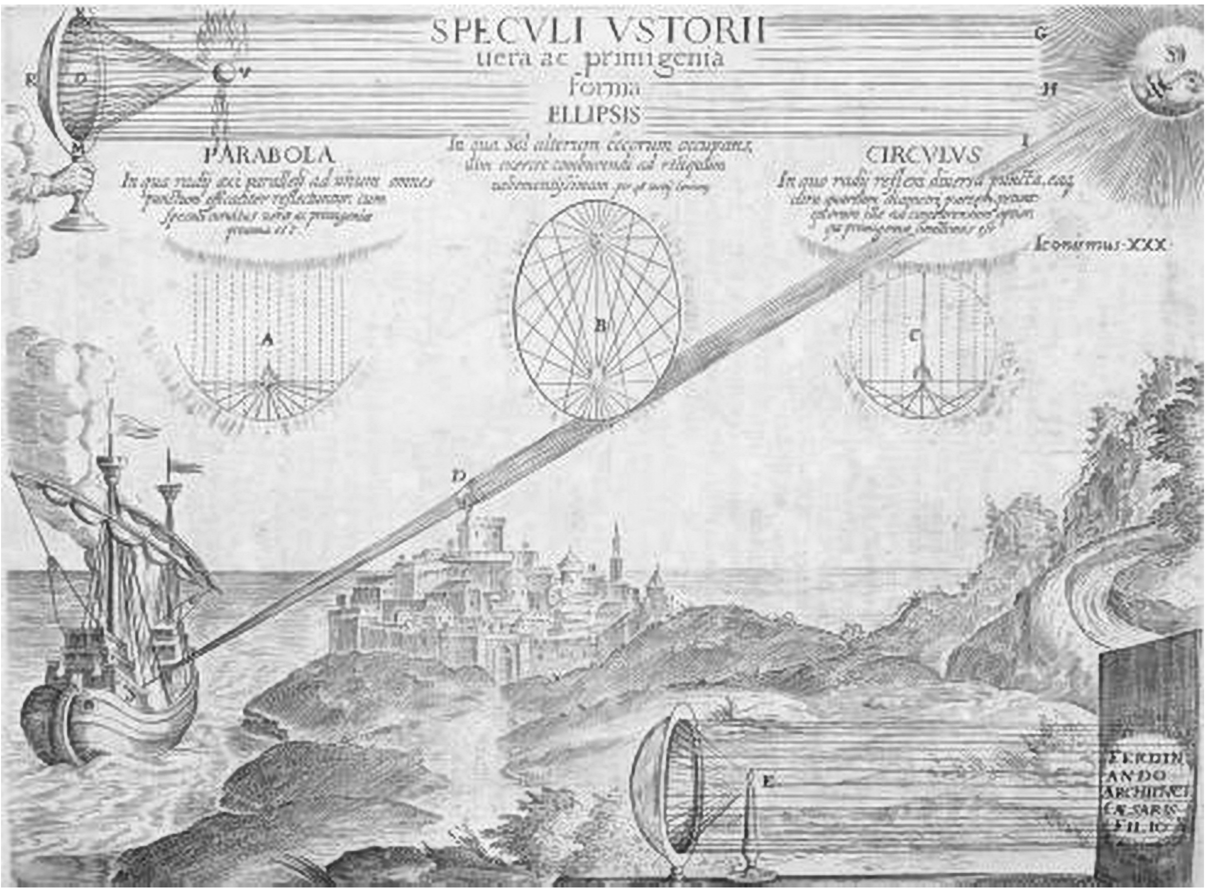


Und stelle dir jetzt noch vor, du säßest in einem Raum, der die Form eines Ellipsoiden hätte.
Du befindest dich wieder in einem Brennpunkt (du hängst also in der Luft an einem Trapez), die Lampe im anderen Brennpunkt. Nun käme das Licht wirklich aus allen Richtungen auf dich zu – links, rechts, oben, unten.
Allein die Vorstellung von diesem Lichtbad ist atemberaubend!

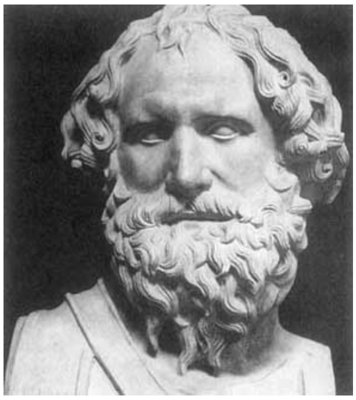
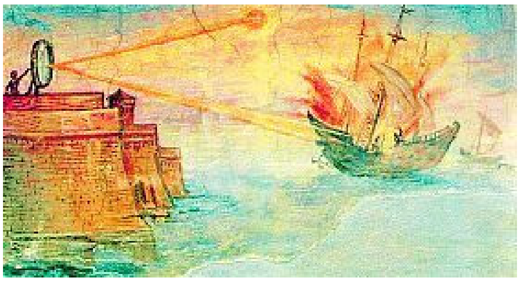
Zeichne den Strahlengang in einer Ellipse.

Die Sage über Archimedes

Diese Vorstellung von der Spiegelung hat die Phantasie großer Erfinder angeregt. Von dem griechischen Mathematiker Archimedes (im dritten Jahrhundert vor Christus) ist eine Sage mit einer genialen Erfindung überliefert. Archimedes beschäftigte sich mit allen Arten von gewölbten Spiegeln, wie auf dem Bild (aus dem 17. Jahrhundert) zu sehen ist.



Im Jahr 212 vor Christus wurde Syrakus, die sizilianische Heimatstadt von Archimedes, von den Römern mit ihren Schiffen angegriffen. Der Sage nach soll Archimedes die römische Flotte mittels Brennspiegel entzündet und vernichtet haben. Die Sonnenstrahlen wurden demnach von einem Spiegel so reflektiert, dass sie sich in einem winzigen, heißen Punkt – dem Brennpunkt – sammelten.

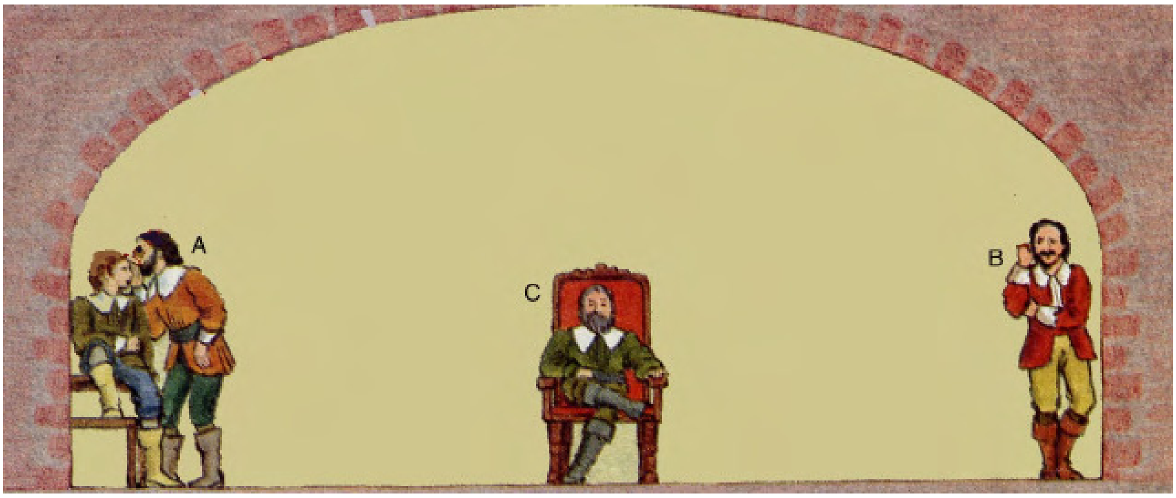




Ist das möglich?

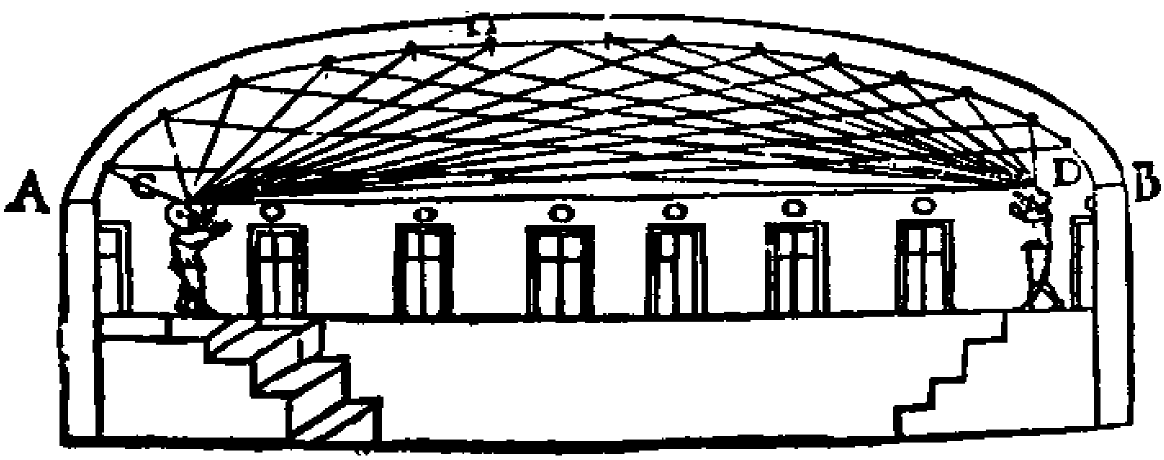
Mit einem einzigen Spiegel sicher nicht. Aber vor kurzem wollte es eine Gruppe von Wissenschaftlern genau wissen und machte einen Versuch. Sie verwendeten 80 Spiegel und richteten sie so aus, dass alle Spiegel das Sonnenlicht auf einen Punkt auf den Bug eines Schiffes lenkten. Die vielen Einzelspiegel bildeten zusammen einen riesigen gebogenen Spiegel. Das Holz entzündete sich tatsächlich.


Flüstergewölbe

Was wir über die Lichtstrahlen gesagt haben, gilt ganz genauso für den Schall. Auch der Schall, der von einem Brennpunkt ausgeht, wird von den Wänden der Ellipse so gebrochen, dass er sich im zweiten Brennpunkt wieder sammelt.



Die beiden Männer links auf dem Bild flüstern sich etwas ins Ohr. Wahrscheinlich wollen sie nicht, dass der sitzende Mann in der Mitte etwas davon mitbekommt. Aber sie rechnen offensichtlich nicht damit, dass die Person ganz rechts alles mitlauschen kann, obwohl sie noch viel weiter weg ist als der mittlere Mann. Wie kann das gehen?

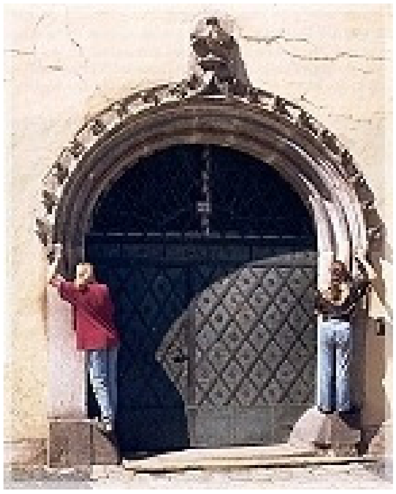


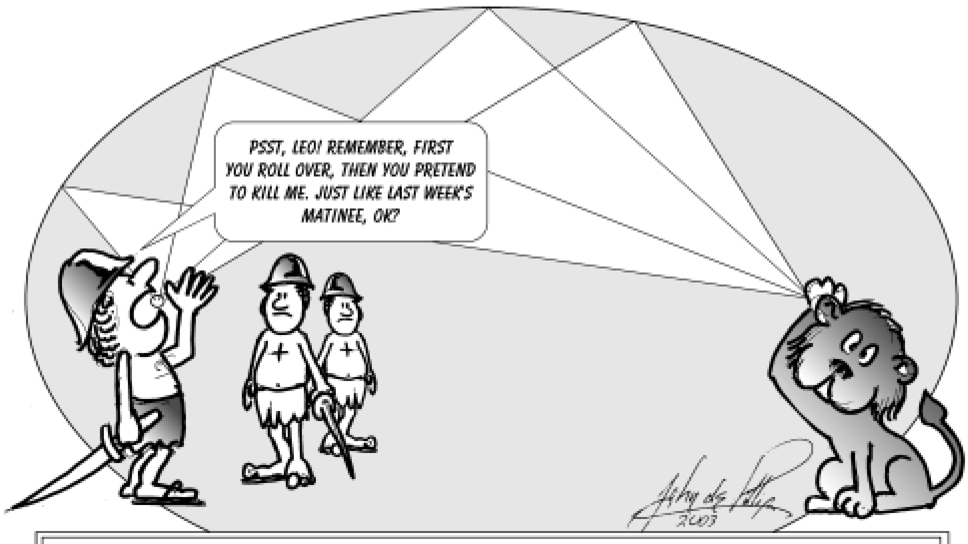
Auf diesem zweiten Bild ist die Lösung eingezeichnet. Das Gewölbe reflektiert den Schall, der von einem Brennpunkt ausgeht, und sammelt ihn im zweiten Brennpunkt. Er verliert sich nicht einfach irgendwo.

Es ranken sich einige Geschichten um solche geheimen Zuhörer. Im Kapitol, dem amerikanischen Parlamentsgebäude, soll ein Senator immer an der gleichen Stelle im Raum gesessen und den Eindruck erweckt haben, er schlafe. Tatsächlich war er immer bestens darüber informiert, was seine politischen Gegner besprachen…

Auf Sizilien gibt es eine Kathedrale, in der angeblich der Beichtstuhl lange Zeit genau im Brennpunkt des elliptischen Raumes stand…

Ganz öffentlich hingegen ist der berühmte Flüsterbogen von Görlitz in Deutschland.



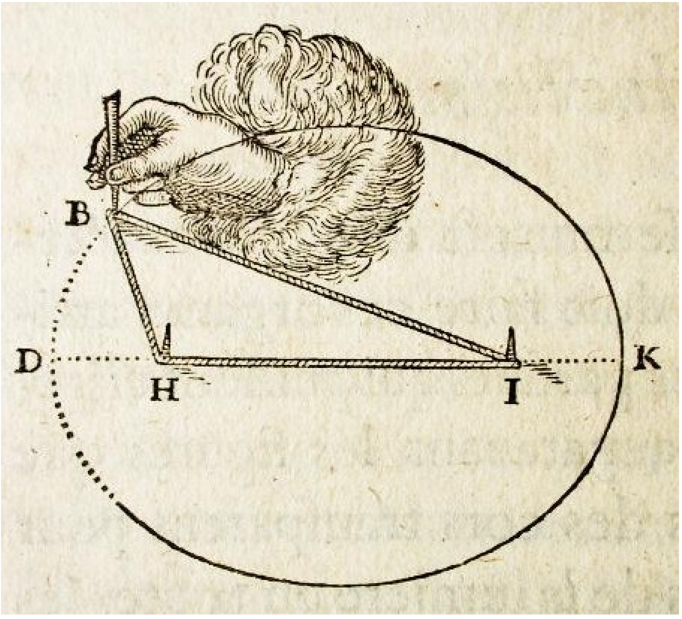


HOW ELLIPTICAL AMPHITHEATERS RESULTED IN COMPASSIONATE GLADIATORS AND LIONS

Verstehst du diesen englischen Cartoon?

Gärtnerkonstruktion mit geschlossener Schnur

Besonders großen Spaß macht die Gärtnerkonstruktion mit einer geschlossenen, verknoteten Schnur.



Das Bild entstammt einem Geometrie-Lehrbuch (La Géometrie) von René Descartes aus dem Jahr 1637.

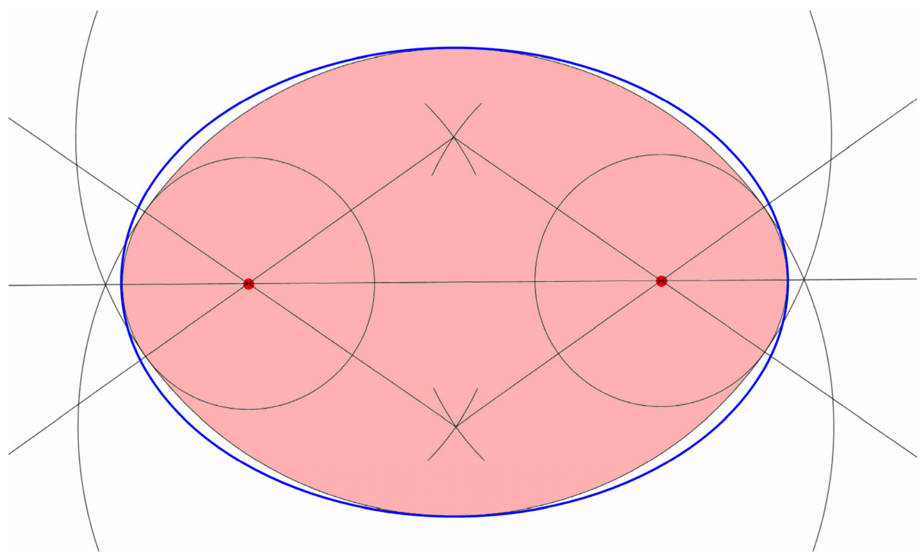
✐ Probiere diese Methode mit dem Ellipsenzirkel aus und beschreibe den Unterschied beim Zeichnen. Welchen Vorteil hat diese Methode?
Wie verändern sich die Ellipsen, wenn du den Abstand der Nägel veränderst?

Das Oval

Wir haben gelernt, wie man eine Ellipse konstruieren kann. Wir können sie auch in Worten beschreiben – definieren:

> ***Die Ellipse ist eine geschlossene Kurve, bei der an jedem Punkt die Summe der Abstände zu den beiden Brennpunkten gleich bleibt.***

Eigentlich ist die Ellipse ein Sonderfall. Es gibt geschlossene Kurven, die ganz ähnlich wie eine Ellipse aussehen, aber keine sind. Solche Formen nennt man ein *Oval*. Vergleiche auf der folgenden Zeichnung:



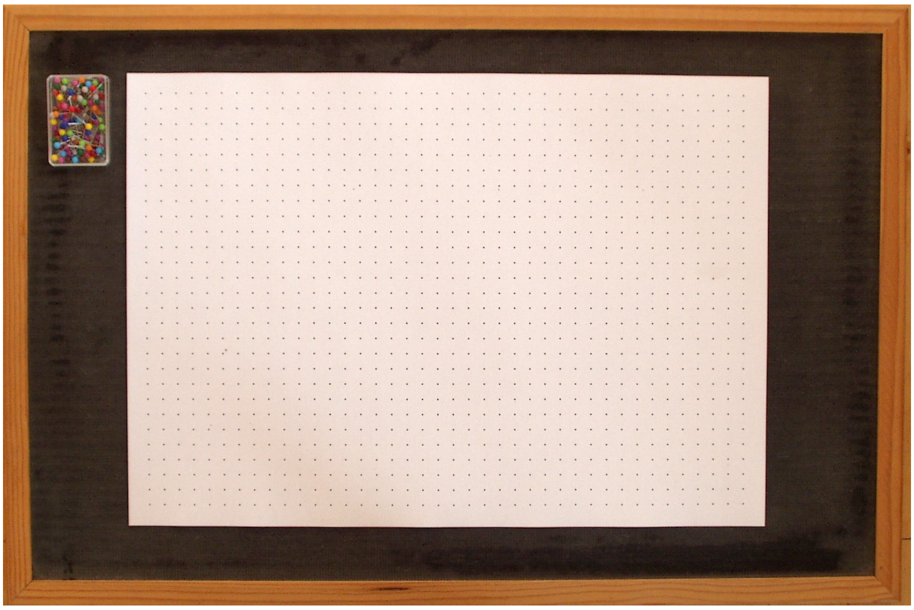
Die blaue Form ist eine Ellipse, die rote Form ist ein Oval.
Versuche zu verstehen, wie das Oval konstruiert wurde.

Die roten Punkte sind keine Brennpunkte. Dieses Oval besteht aus vier Kreisbögen mit zwei unterschiedlichen Radien. Der größere Bogen an der langen Seite und der kleinere Bogen am Ende gehen nahtlos ineinander über.

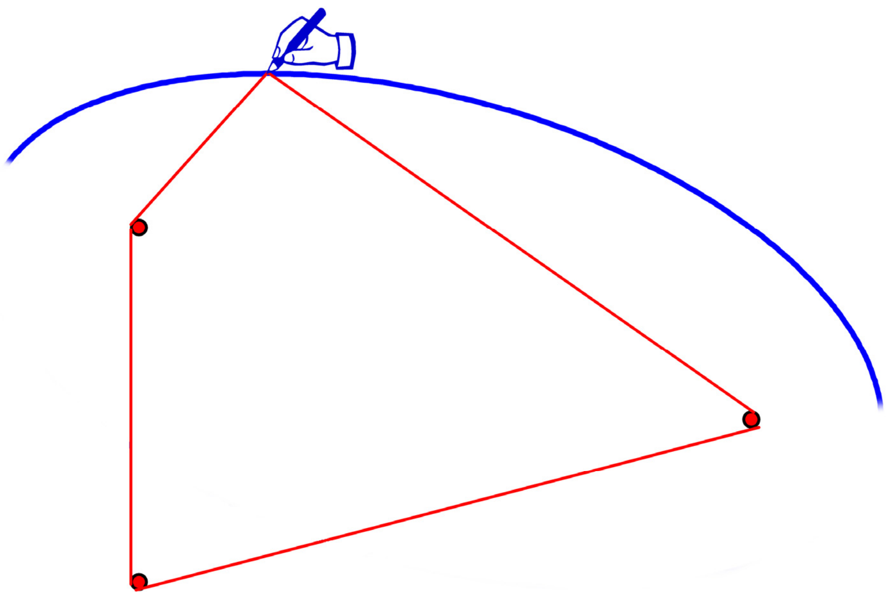
✐ Probiere es aus – konstruiere ein Oval mit Zirkel und Lineal.

Das Ei

Eine andere Konstruktionsmöglichkeit bietet unser Geometrie-Steckbrett.

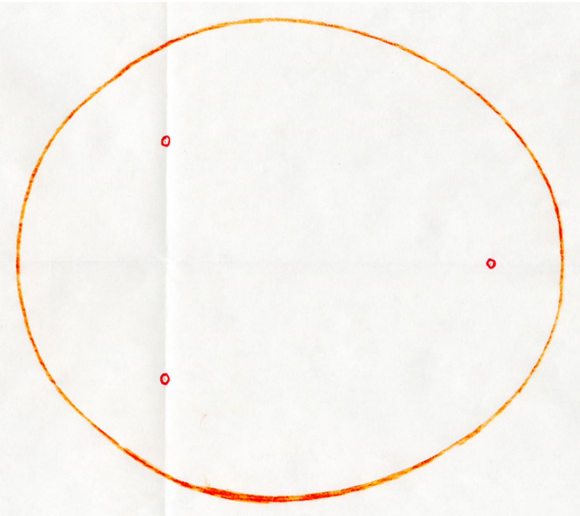


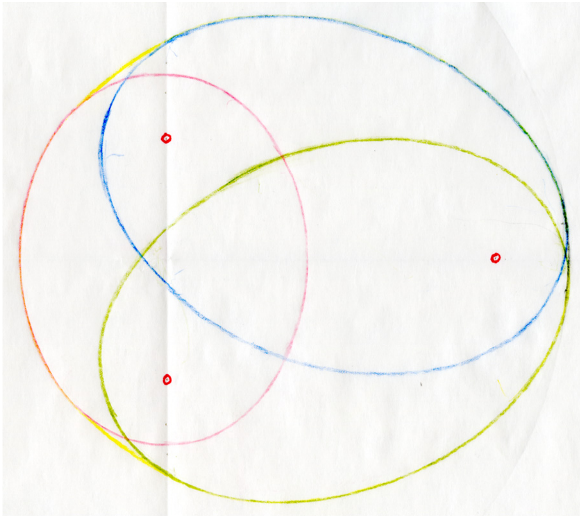
Dieses Mal verwenden wir drei Stifte und eine geschlossene Schnur.



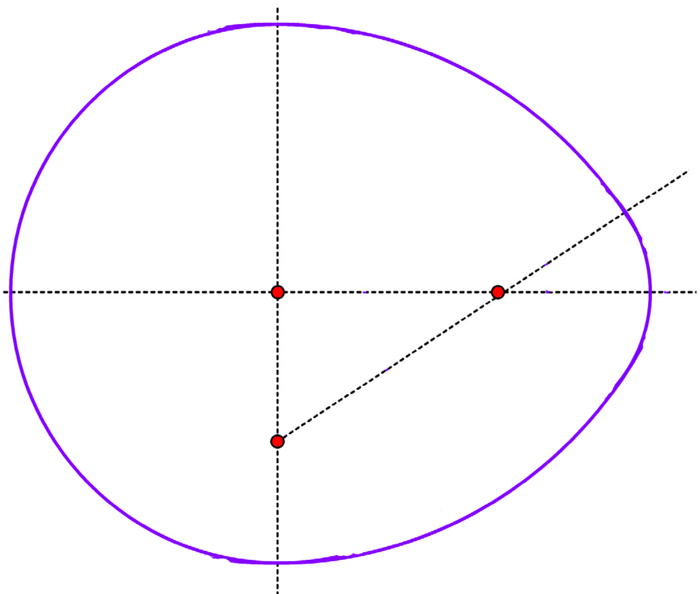
✐ Probiere es aus! Was stellst du fest?

Wenn man die Stifte als gleichschenkliges Dreieck anordnet, entsteht ein wunderbares Ei. Es besteht im Wesentlichen aus Teilen von drei verschiedenen Ellipsen. Man kann sich vorstellen, dass jeweils um zwei Stifte eine geschlossene Ellipse gezogen werden könnte.





Albrecht Dürer, der Künstler und Mathematiker, hatte vor 500 Jahren noch eine andere Idee. Hier wird aber nicht verraten, wie er das Ei konstruiert hat. Nur so viel: Es geht wieder mit Zirkel und Lineal. Wie es genau geht, kannst du anhand der Zeichnung selbst herausfinden.



Findest du es heraus?

Ellipsen im Alltag

Du kannst ein paar Experimente machen:

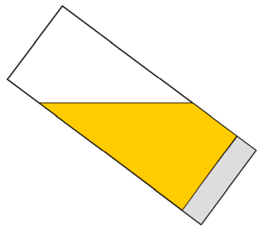
1.

Fülle ein rundes, zylindrisches Glas zur Hälfte mit gefärbtem Wasser oder Saft.

Schaue von oben auf das Glas: Du siehst einen Kreis.

Neige nun das Glas etwas (ohne dass die Flüssigkeit ausläuft).

Schaue wieder von oben. Was siehst du?



Wo findest du entsprechende Phänomene?

2.

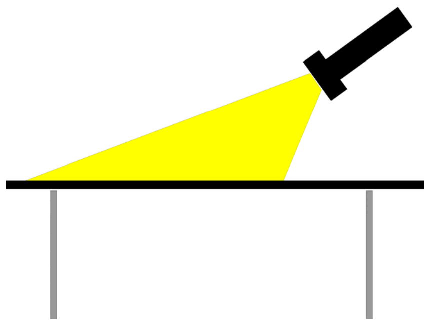
Leuchte mit einer Taschenlampe oder LED-Lampe in einem abgedunkelten Raum genau von oben auf einen Tisch. Schaue dir den Lichtspot an:

Welche Form hat er?

Neige nun die Lampe etwas zu Seite.

Beobachte den Lichtspot.

Wie verändert er sich?



Wo findest du entsprechende Phänomene?

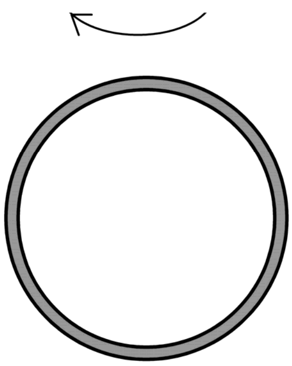
3.

Stelle einen Reifen oder ein Rad senkrecht auf.

Betrachte es aus ein paar Metern Entfernung von der Seite.

Du siehst einen Kreis.

Drehe nun den Reifen etwas zur Seite. Betrachte ihn wieder aus einiger Entfernung – nun schräg. Es hilft, wenn man ein Auge zudeckt. Wie sieht die Form nun aus?



Wo findest du entsprechende Phänomene?

Erklärungen/Beispiele:

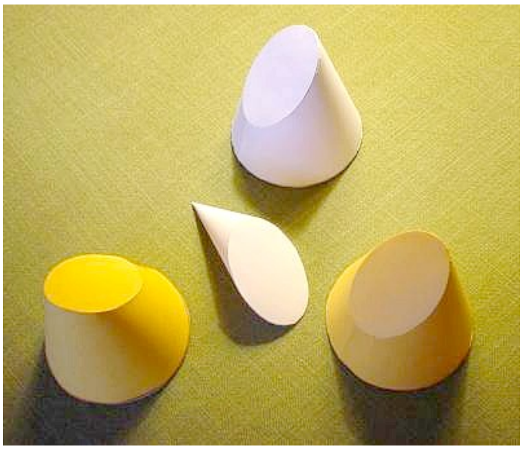
zu 1:

Weitere Beispiele:

- Runde Salami oder rundes Baguette schräg anschneiden.
- Blumenstängel schräg anschneiden.
- Weihnachtsmann aus einem schräg abgesägten Rundstab.


Eine Ellipse entsteht immer dann, wenn ein Zylinder (eine Röhre oder ein Rundstab) schräg abgeschnitten wird. Die Schnittfläche ist eine Ellipse.

zu 2:

Der Lichtstrahl ist ein Kegel. Wenn ein Kegel schräg geschnitten wird, entsteht ebenfalls eine Ellipse. Bei dem Lichtspott zum Beispiel bildet der Bühnenboden eine „Schnittfläche“ in dem Lichtkegel.

Die Mathematiker nennen das einen *Kegelschnitt*.

zu 3:

Wir *wissen* zwar, dass der Reifen, den das Mädchen hier um die Hüfte schwingt, ein Kreis ist. Aber aus der schrägen **Perspektive** *erscheint* er uns als Ellipse.

Normalerweise fällt uns das gar nicht richtig auf. Weil wir genau wissen, dass sich der Reifen ja nicht wirklich verändert, wenn wir ihn seitlich sehen, denken wir gar nicht darüber nach, dass unser Auge tatsächlich eine Ellipse sieht.

*****

Übrigens: Der Name *Ellipse* ist griechisch und bedeutet „Mangel". Das ist aber nicht wertend gemeint, so als sei diese Form mangelhaft. Die griechischen Mathematiker haben die Ellipse so genannt, weil bei ihren Berechnungen des Flächeninhalts immer ein kleines Stückchen fehlte.

In manchen Lexika steht fälschlicherweise, die Ellipse („Mangel") heiße so, weil es ihr an der perfekten Kreisform mangele. Die Ellipse sei einfach nicht vollkommen.

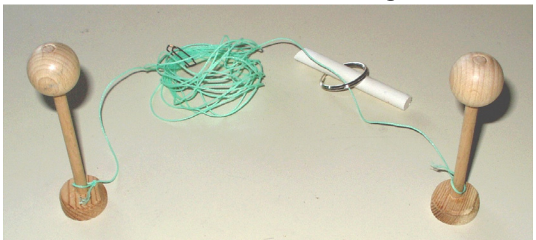
Wir haben eine lange Reise unternommen durch die Geschichte, die Mathematik, die Architektur und die Kunst.

Ist die Ellipse nicht eine ganz erstaunliche, wundervolle Form?

Anhang für LehrerInnen

Methodische Anmerkung:
Diese Abhandlung ist so formuliert, dass sie sich direkt an das Kind richtet. Interessierte Schüler sollen selbständig in dem Buch lesen können und zu eigenen Arbeiten angeregt werden. Genauso kann die Lehrerin/der Lehrer das Buch zusammen mit dem Kind dialogisch lesen und die Sachverhalte handelnd nachvollziehen. Man kann das Buch aber auch lediglich als Handbuch für den Erwachsenen verwenden und lediglich einzelne Gesichtpunkte/Anregungen für eine Einführung verwenden.

Zu Seite 6:
Der vorbereitete Ellipsenzirkel dient bei mir im Klassenzimmer dazu, bei Bedarf mit Kreide eine Ellipse für das „Gehen auf der Linie“ zu zeichnen. Dazu habe ich auf dem Fußboden die beiden Brennpunkte markiert, auf denen die Ständerchen fixiert werden. Gut geht das im Team, wenn je ein Kind einen Ständer festhält. Man kann die Ständer ebenso mit doppelseitigem Klebeband fixieren, wenn man keine Helfer hat oder die Einführung bewusst alleine ohne Ablenkung geben möchte.
Zur Konstruktion/Berechnung der Schnur siehe Seite 14.



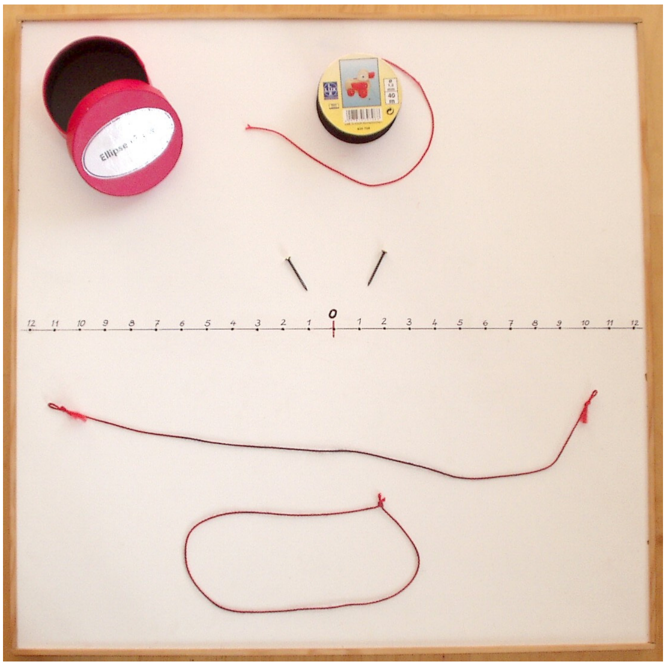
Die Ständer sind ca. 10 cm hoch.
Ohne Ring würde die Schnur die Kreide durchschneiden.

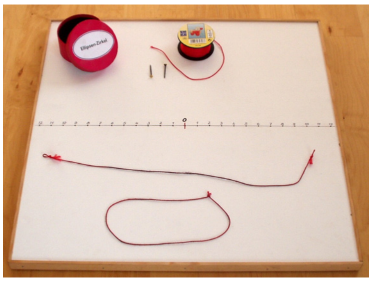
Im Internet gibt es Videosequenzen zur Handhabung:
www.z-u-l.de/doc_de/Data/Anwendungen/Kegelschnitte/Gaertner.html
http://did.mathematik.uni-halle.de/lern/filmEllipse.html
www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/mathei/kurven/pins22.html

Zu Seite 7:
„Ellipsenzirkel – Spiel mit der Exzentrizität“

Bauanleitung:
- 1 weiß beschichtete Spanplatte, 16 mm, 50 x 50 cm
- Rahmen aus Kieferleiste, 5 x 20 mm; Rahmen steht oben 4 mm über und hält das Papier (50 x 50 cm) fest.
- 4 selbstklebende Filzscheiben an der Unterseite
- 2 Stahlnägel 2,0 x 30 mm mit großem Kopf
- Maurerschnur (1,3 mm), fein verwoben, damit sie beim Zeichnen sich nicht auflöst.

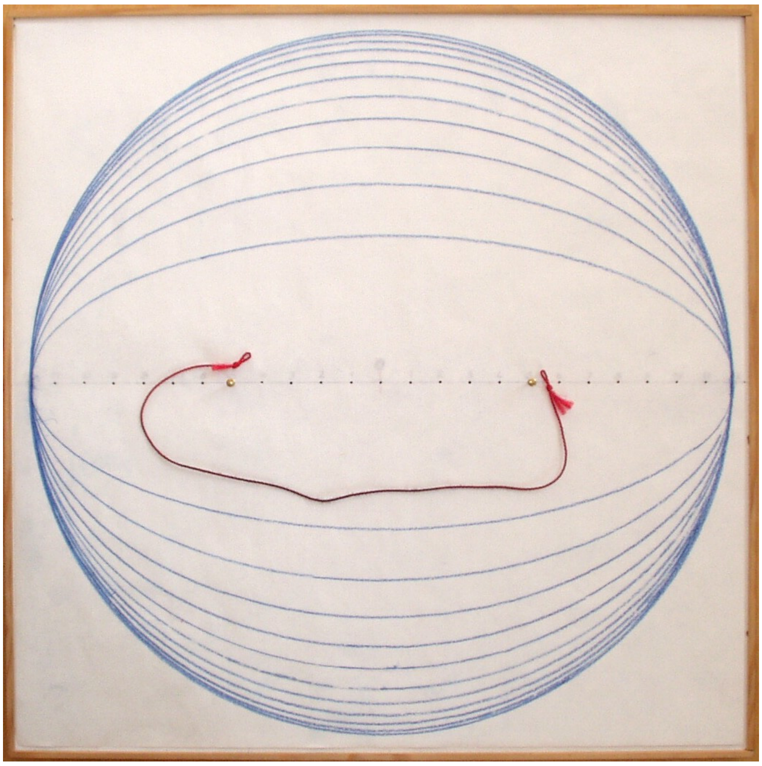
Die Mittelachse mit wasserfestem Stift auf die Platte zeichnen.
Bohrungen mit 2 mm (nicht ganz durch) von der Mitte aus alle 2 cm.
Löcher nummerieren, „0“ als Mitte, nach links und rechts bis „12“.





Die „offene Schnur“: An den Enden eine Schlaufe; Länge so, dass sie in gespanntem Zustand genau von 12 (links) bis 12 (rechts) reicht.

Verschiedene Ellipsen mit der offenen Schnur:

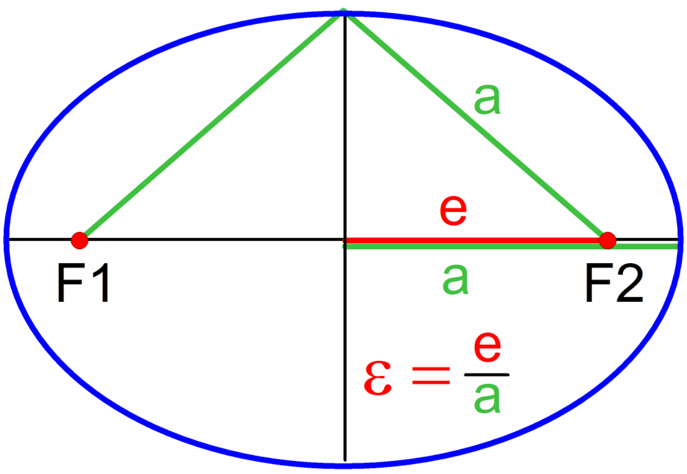


Zu Seite 11:
Zur Geschichte der Gärtnerkonstruktion habe ich einen wissenschaftsgeschichtlich interessanten Hinweis gefunden, den ich nicht weiter überprüfen konnte: Im 8. Jahrhundert verfasste der arabischer Gelehrte al-Hassan ben Mussa ein Werk über Kegelschnitte und die Gärtnerkonstruktion. (www.allmystery.de/themen/pr8697)

Zu Seite 13:
Das Geometrie-Steckbrett wird in erster Linie für den Baukasten „Stäbe für Geometrie" von Jan van de Kerkhof verwendet. Im Anhang dieser Arbeit befindet sich eine Kopiervorlage für ein Punktraster, das am besten auf DIN A3 vergrößert wird. So kann man mit den Einheiten des Punktrasters gezielt experimentieren und die Zeichenergebnisse beschreiben und gegebenenfalls berechnen.

Zu Seite 14:
Der erste Teil der Berechnung ($e=\sqrt{a^2-b^2}$) ist die übliche mathematische Darstellung. Ich erweitere die Gleichung um den Term $x=\sqrt{Länge^2-Breite^2}$, weil ich meine, dass bei der Absicht, eine Ellipse zu konstruieren, der Wert „x" am praktikabelsten ist. (Siehe auch unten zu Seite 15f)

Zu Seite 15f:
Ich beschreibe hier die Exzentrizität etwas anders als üblich. Die konventionelle mathematische Darstellung ist folgendermaßen:



Unterschieden werden die Begriffe *Lineare Exzentrizität* e als Strecke und die *Numerische Exzentrizität* ε als Verhältniszahl.
Mir geht es in meiner Darstellung mehr um die phänomenologische und handlungsorientierte Beschreibung der Ellipse. Der Abstand der Brennpunkte erscheint mir im Blick auf die Abflachung der Ellipse augenfälliger zu sein als die halbe Strecke e. Auch im Hinblick auf die

Konstruktion mit der Gärtnerkonstruktion ist die Hervorhebung der Länge x praktikabler. Mathematisch spielt dies für den Wert ε keine Rolle. Auf die konventionelle Benennung der *Brennpunkte* mit F1 und F2 verzichte ich, weil dieser Begriff erst später eingeführt wird.

Zu Seite 18:
Genau genommen steht nicht die Sonne im Brennpunkt, sondern der gemeinsame Schwerpunkt von Sonne und Planet, der sich aufgrund der Größe der Sonne allerdings noch innerhalb der Sonnenkugel befindet. Die Bewegung ist trotzdem streng genommen eine gemeinsame Bewegung – auch die Sonne eiert ganz leicht mit.

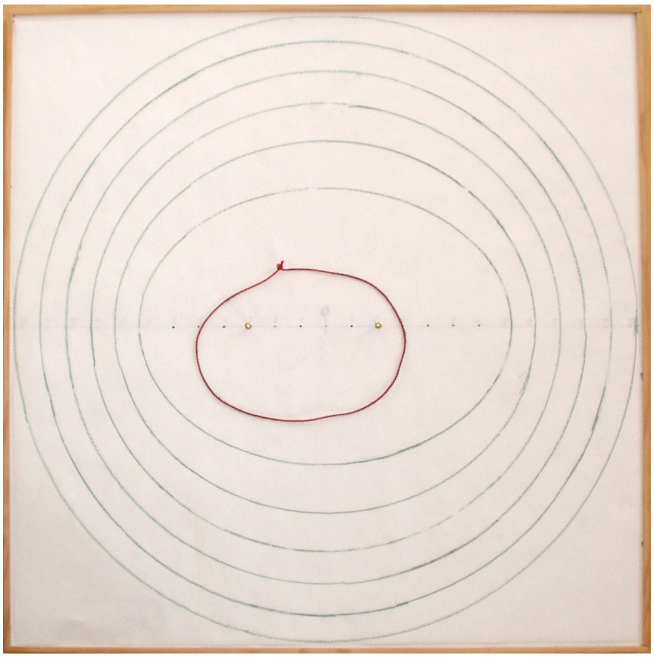
Zu Seite 23:
Erinnert sei an den Ellipsoid als ein Bestandteil der blauen „Geometrischen Körper". Man könnte zeigen, dass der Ellipsoid durch Rotation der Ellipse um die Längsachse entsteht.

Zu Seite 24f:
Die historische Abbildung zeigt, dass sich Archimedes mit verschiedenen Arten von Spiegel beschäftigte – sphärische, parabolische und elliptische. Es ist klar, dass die Sage um die „Brennspiegel" die parabolische Form im Hintergrund hat. Das führt dementsprechend vom Thema „Ellipse" weg. Aber die Geschichte ist einfach zu schön um sie wegzulassen und sie macht das Phänomen „Brennpunkt" wunderbar deutlich.
Zum historischen Hintergrund und zum modernen Experiment:
http://wwwalt.uni-wuerzburg.de/aegyptologie/kircher/archimedes.html
www.nachlese.at/archimedes-todesstrahl.htm

Zu Seite 26:
Eine Ergänzung: Wenn sich noch andere sprechende Personen in der Flüstergalerie befinden, könnte man der Meinung sein, dass sich deren Unterhaltungen störend auf das Gespräch zwischen A und B auswirken. Interessanterweise ist dies nicht der Fall. Eine Schall- oder Lichtquelle, die sich nicht in einem Brennpunkt befindet, kann zwar natürlich direkt die Punkte A und B treffen, aber niemals durch Reflektion an der Hülle.

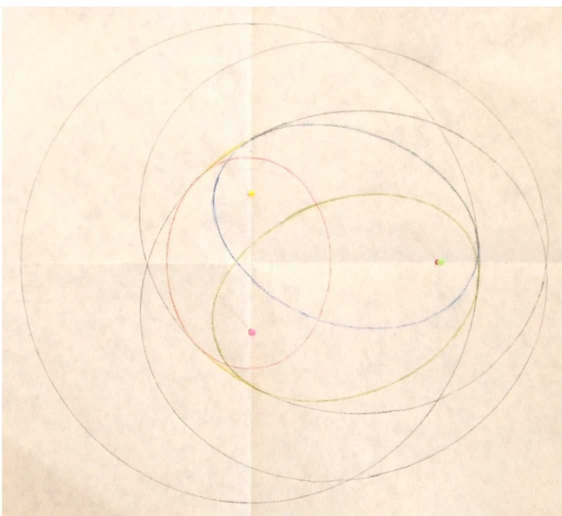
Zu Seite 28:
Diese Methode mit geschlossener Schnur hat eine noch größere Faszination, weil man die Ellipse in einem Zug zeichnen kann ohne an den Stiften die Schnur über den Stift heben zu müssen.
Die geschlossene Schnur so vorbereiten, dass sie in gespanntem Zustand von 6 (links) bis 6 (rechts) reicht. Größer ist nicht sinnvoll, weil der größte Kreis (Exzentrizität 0) einen Radius von maximal 6 hat.

Bei verschiedenen Brennpunkt-Abständen ändert sich sowohl die Länge als auch die Exzentrik (Form) der Ellipse.



Zu Seite 30:
Eine weitere reizvolle Möglichkeit, ein (kartesisches) Oval mit dem Ellipsenzirkel zu zeichnen, findet sich als Videosequenz im Internet:
www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/mathei/kurven/pins22.html

Zu Seite 31:
Die Beschreibung mit den drei wesentlichen Ellipsen ist unvollständig. Schaut man genauer, erkennt man in den Bereichen der Scheitelpunkte Lücken bzw. Abweichungen gegenüber der gelben Eiform. Das komplette Ei setzt sich nicht nur aus den drei genannten (farbigen) Hauptellipsen zusammen, sondern zusätzlich aus drei größeren (schwarzen) Ellipsen, die sich ergeben, wenn man bei gegebener Schnur jeweils den dritten Nagel herausnimmt.



Dies alles konstruktiv nachzuvollziehen, ist reizvoll, übersteigt aber die anvisierte Abstraktionsleistung der Kinder entschieden. Die gedankliche Analyse der Form mit drei Hauptellipsen dürfte eine Höchstleistung sein, die nicht ohne eine besondere situative Veranlassung weiter problematisiert werden sollte.

Dürer-Lösung: Kreisbögen mit zugehörigen Mittelpunkten (siehe Farben!).

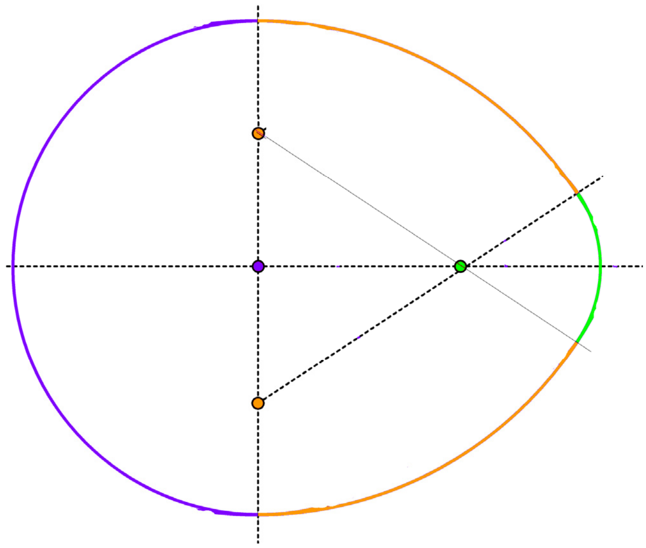


Bild- und Quellennachweise

Titelseite: www.z-u-l.de/doc_de/Data/Anwendungen/Kegelschnitte/Gaertner.html
Seite 3: a), b), c) Markus Wurster (MW)
Seite 4: a) 5555 Meisterwerke, Direktmedia; b) www.koenigin-luise.com; c) www.goettgen.de
d) www.romaculta.it; e) GoogleEarth; f) www.pixelio.de; g) GoogleEarth
Seite 5: a) GoogleEarth; b) und c) Rainer Möck, privat
Seite 6: a) MW; b) www.z-u-l.de/doc_de/Data/Anwendungen/Kegelschnitte/Gaertner.html; c) MW
Seite 7: MW
Seite 8: MW
Seite 9: MW
Seite 10: MW
Seite 11: a) MW; b) www.math.unibas.ch/~walser/institut/vorlesungen/07ss/RG/Vorlesung/06_V_Ellipse.pdf
Seite 12: a) und b) MW
Seite 13: a) und b) MW
Seite 14: MW
Seite 15: a) und b) MW
Seite 16: a), b) und c) MW
Seite 17: a) www.blinde-kuh.de/weltall/geschichte.html; b) Wikipedia „Kepler“
Seite 18: MW
Seite 19: a) und b) MW
Seite 21: MW
Seite 22: a) und b) MW
Seite 23: www.answers.com/topic/ellipsoid
Seite 24: wwwalt.uni-wuerzburg.de/aegyptologie/kircher/archimedes.html
Seite 25: a) und b) Wikipedia „Archimedes“; c) www.heurekaheureka.com/archimedes.html;
d) und f) www.nachlese.at/archimedes-todesstrahl.htm
Seite 26: a) www.schul-lab.de/schul-lab/Material/UnterMat/AH/AH%20Akustik%20Arbeitsblaetter.pdf
b) http://web.math.unifi.it/archimede/archimede/curve/visita/echieriflessi.htm
Seite 27: a) www.wundersamessammelsurium.de/Akustisches/Allerlei;
b) www.maths.tcd.ie/EMIS/journals/NNJ/Query07-Ellipses.html
Seite 28: a) http://www.math.ubc.ca/~cass/graphics/manual/ellipse.html; b) Wikipedia „Descartes“
Seite 29: MW
Seite 30: a) und b) MW
Seite 31: a), b), d) MW; c) Wikipedia „Dürer“
Seite 32: a), b), c) MW
Seite 33: a) www.ungarninfo.org/home/spezialitaet/s_salami.htm;
b) http://lichtinsdunkel.orf.at/?Story=852; c) http://peterandthewolves.de; d) ?
Seite 34: www.sport-thieme.com/y/450Pixel/1338906.jpg
Seite 35: MW
Seite 36: a), b) und c) MW
Seite 37: MW
Seite 39: a) und b) MW
Seite 40: MW