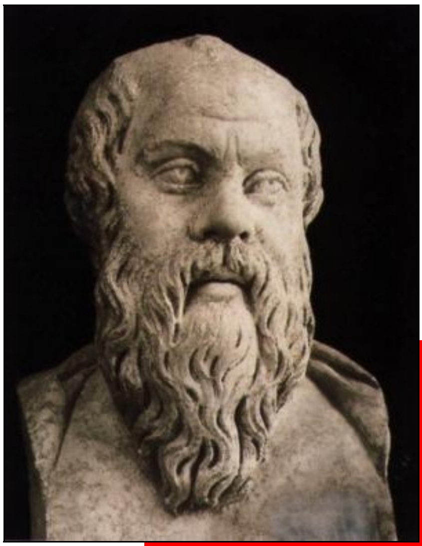
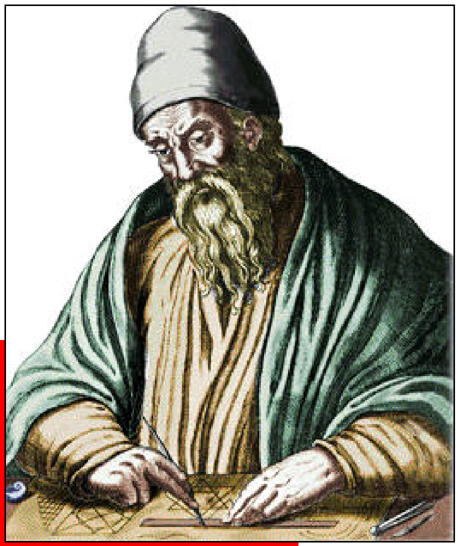


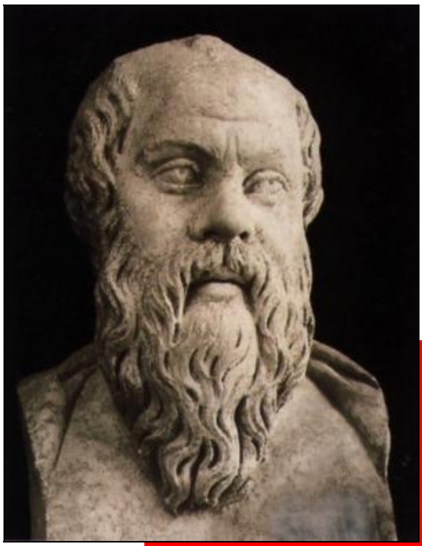


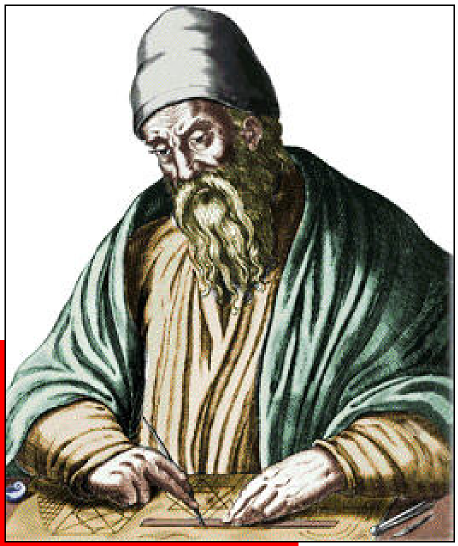
Das verdoppelte Quadrat

Markus Wurster

oben: Buchumschlag; unten: Buchrücken; nächste Seite: Deckblatt

Das verdoppelte Quadrat





Das verdoppelte Quadrat

Markus Wurster

Inhalt

Impressum:

Vorwort

Die Geometrie hat es vergleichsweise leicht, „Initial-Probleme“ im Wagenscheinschen Sinne zu formulieren. Zumal, wenn die Geschichte schon ein ausformuliertes „Lehrbeispiel“ aus den historischen Anfängen der Geometrie bereithält. Der von Platon überlieferte Dialog zwischen Sokrates und Menon ist nicht in mathematikdidaktischer Absicht geschrieben worden. Aber „sokratische“ Pädagogen wie Martin Wagenschein haben den philosophischen Text für das „genetisch-sokratisch-exemplarische“ Lernen entdeckt und aufbereitet. Der schweizer Lehrer und Physiker Peter Stettler hat Wagenscheins Lehrgang in stark gekürzter Form in seinem Aufsatz „Verstehen lehren nach Wagenschein“ beschrieben. Diesen Impuls wollte ich aufgreifen.

Die Idee für dieses Arbeitsbuch besteht darin, die wagenscheinsche Vorlage für die Arbeit im Kontext der Montessoripädagogik fruchtbar zu machen. Das bedeutet:

- Individuelle Einführung im Rahmen der Freien Arbeit
- Dialogische Phasen
- Erfahrungsmöglichkeiten unter Verwendung des vorhandenen Montessorimaterials
- Ansetzen an Interessenspunkten der Schüler
- Auswahlmöglichkeiten bei den Inhalten, Anwendungen und Weiterführungen
- Bezüge zur Kulturgeschichte

Der Ausgangspunkt für die Arbeit an dem „verdoppelten Quadrat“ bildet die originale Aufgabe von Sokrates. Der Dialog dazu, die didaktische Hilfestellung, ist von Wagenschein umformuliert. Die klassische Fortführung wäre der Beweis von der Irrationalität von Wurzel aus 2. Dieses Thema streife ich nur, berühre es eher indirekt. Für die anvisierte Altersstufe der Schüler von ca. 9 bis 12 Jahren stehen im Vordergrund die Phänomene, das Konstruieren und das, was sich handelnd nachvollziehen lässt. Dann aber gilt immer wieder die Anregung und die Herausforderung, das Erkannte und Vermutete selbst (schriftlich oder mündlich) zu formulieren.

Die Voraussetzungen für die Arbeit mit diesem Buch sind sinnvollerweise, aber nicht notwendigerweise:

- Für Teil 1 Erfahrungen im Umgang mit unterteilten Formen; das Material „Aufgeteilte Quadrate und Dreiecke“.
- Für Teil 2 und folgende ein Verständnis von dem Begriff „Wurzel“, am besten durch Erfahrungen mit dem „Wurzelbrett“ und ein Verständnis von der Reversibilität von Quadrieren und Wurzel ziehen, sowie ein Verständnis von der Dezimalschreibweise mit Komma („Dezimalbruchrechnen“).

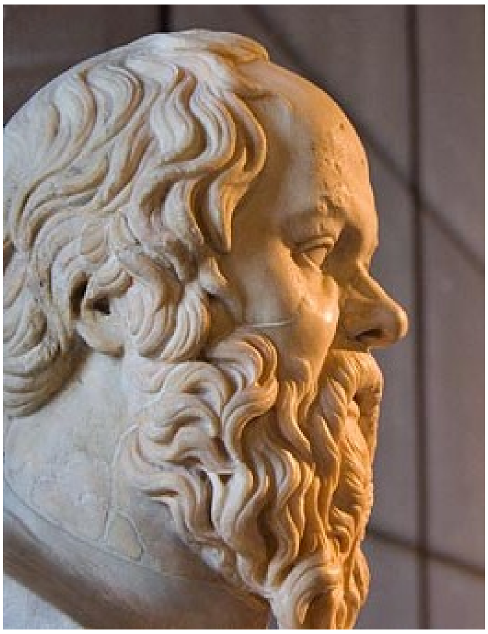
Das Arbeitsbuch ist für Schüler und Lehrer gemacht. Beide können es phasenweise gemeinsam durchgehen und dialogisch erarbeiten. Manche Teile des Buches können Schüler auch ganz selbständig (allein oder mit Partner) lesen und nachvollziehen. Dies ist für die Organisationsform „Freie Arbeit“ wichtig. Der Kommentarteil des Buches muss nicht versteckt werden. Bei Bedarf kann der begleitende Erwachsene hier jederzeit nachschauen.
Denkbar ist auch, dass der Lehrer das Buch nur im Hintergrund verwendet und einem interessierten Schüler jeweils in der Situation weiterführende Impulse gibt.

Das Arbeitsbuch gibt eine Reihe von Impulsen für Versuche, Skizzen, Messungen und Formulierungen von Erkenntnissen oder Vermutungen. Es empfiehlt sich, diese Unterlagen für eine eigene Mappe zu sammeln oder von vornherein ein Heft für dieses Thema anzulegen.

Das verdoppelte Quadrat

Teil 1

– Die Aufgabe –



Vor etwa 2400 Jahren stellte der griechische Philosoph **Sokrates** einem Schüler eine Aufgabe, die sehr berühmt wurde:

*»Hier ist ein Quadrat.
Ich möchte wissen, welches Quadrat genau doppelt so viel Fläche fasst.«*

Hier bitte ein rotes quadratisches Faltpapier 12x12 cm aufkleben.

→ ***Finde dieses verdoppelte Quadrat!***

Zwei Lösungswege:

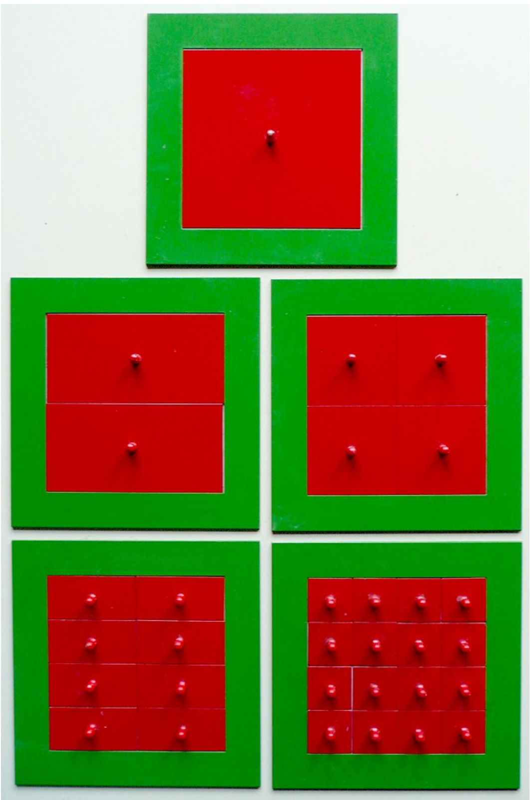
1. Weg

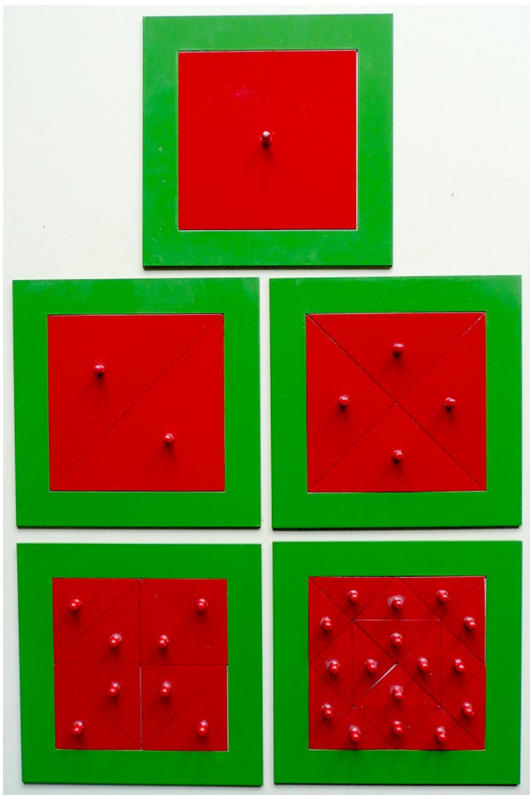
→ ***Verwende quadratisches Faltpapier wie auf der Seite 5.***

→ ***Du kannst das Papier falten und beliebig zerschneiden.***

2. Weg

→ ***Verwende die metallenen Formen „Aufgeteilte Quadrate und Dreiecke".***





→ ***Dokumentiere deine Versuche und Ergebnisse.***

Zuerst dachte der Schüler von Sokrates, die Aufgabe sei kinderleicht.
Aber seine erste Idee war falsch.
Er merkte, wie verzwickt die Aufgabe in Wirklichkeit ist.
Sokrates ließ den Schüler mit der Aufgabe nicht allein. Im Gespräch führte er ihn durch seine beharrlichen Fragen Schritt um Schritt weiter. Der Schüler erlebte, dass er die Fragen von Sokrates alle selbst beantworten konnte und dass er so die richtige Lösung schließlich selbst finden konnte.

→ ***Frage deine Lehrerin oder deinen Lehrer. Sie oder er kann dir in ähnlicher Weise helfen, so dass du die Lösung findest. (Siehe Anhang S. 36)***

Du kannst aber auch ganz alleine arbeiten und dir die Lösung ganz alleine überlegen. Sokrates' Schüler durfte das nicht. An vielen Schulen wird heute so unterrichtet, wie es Sokrates vorgemacht hat. Man nennt diese Art zu unterrichten den „fragend-entwickelnden Unterricht".
Wie lernst du am liebsten?
Übrigens wollte Sokrates eigentlich gar keine Lehrmethode für die Schulen demonstrieren. Er wollte zeigen, dass wir alle unsere Einsichten immer schon von Geburt an unbewusst in uns tragen. Man braucht nur jemand, der uns daran erinnert, der uns hilft die verborgenen Erkenntnisse in uns bewusst zu machen.

Blättere erst weiter, wenn du diese Aufgabe gelöst hast!
Auf den folgenden Seiten führt uns die Aufgabe auf eine weite Reise in die Mathematik.
Aber das wird erst dann richtig interessant, wenn du den ersten Teil der Aufgabe selber gelöst hast.

Das verdoppelte Quadrat

Teil 2

– Die Verhältniszahl –

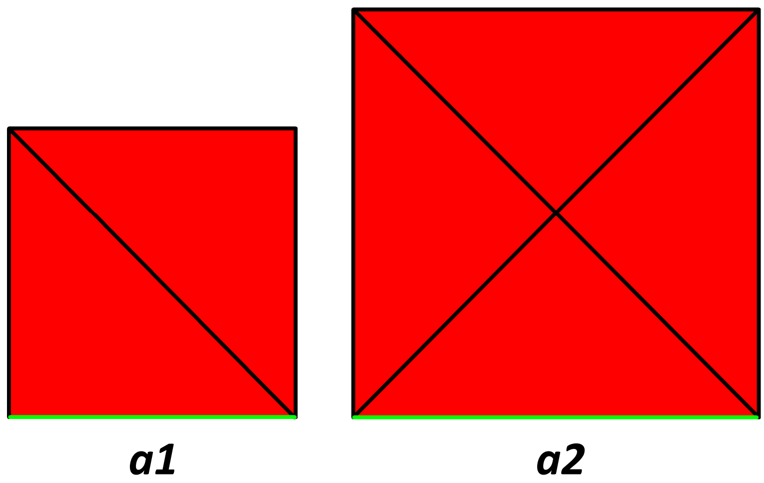
Denke daran:

Blättere erst weiter, wenn du die erste Aufgabe gelöst hast!

1. Der zweite Teil der Aufgabe von Sokrates lautet:

»Hier ist ein Quadrat. Ich möchte wissen, welches Quadrat genau doppelt so viel Fläche fasst.«

»Ich möchte auch die Seitenlänge des doppelten Quadrats wissen: Die Seite, auf die es sich aufbaut, gemessen im Vergleich zur Seite des ersten Quadrats.«



Man kann auch so fragen:

*Wie viel mal ist die große Quadratseite **a2** größer als die kleine Quadratseite **a1** ?*

oder:

*Wie ist das Verhältnis der beiden Quadratseiten **a2 : a1** ?*

Wir können den Vergrößerungswert nach unserer Arbeit mit den zerschnittenen Quadraten grob abschätzen:

2 mal? – Nein kleiner!

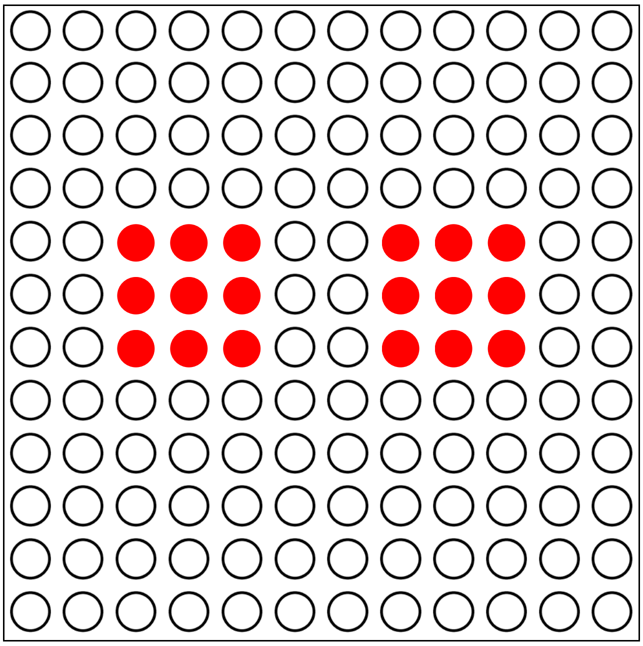
1 1/2 (1,5) mal? – So ungefähr!

2. Eine Messreihe

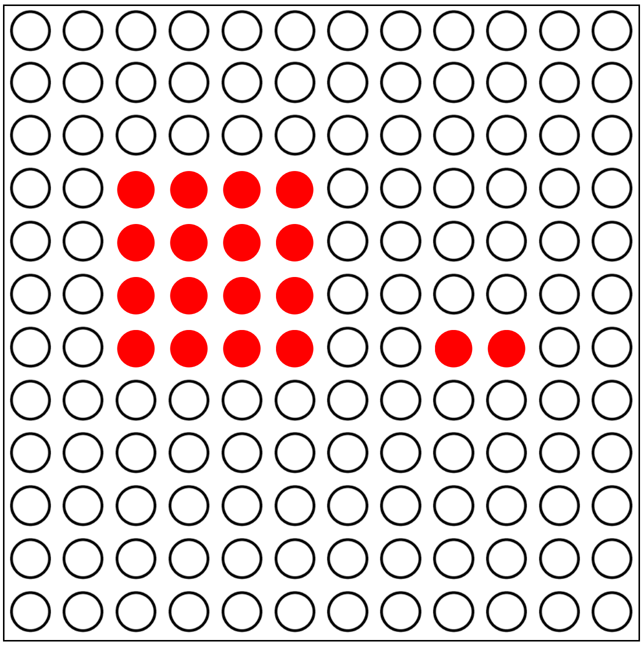
Machen wir eine Messreihe, wie es die Wissenschaftler tun. Wir wollen sehen, ob wir die genaue Zahl durch sorgfältiges Ausprobieren ermitteln können.

→ ***Wir brauchen das Wurzelbrett mit Perlen sowie Notizpapier und Stift.***

Nehmen wir ein Ausgangsquadrat mit Seitenlänge 3. Es sind 9 Perlen.
Wir legen das Quadrat ein zweites Mal auf das Brett.
Jetzt haben wir zusammen 18 Perlen.



Versuchen wir aus diesen 18 Perlen ein neues Quadrat zu legen. Wenn es uns gelingt, können wir die Seitenlänge des doppelten Quadrats abzählen.



Leider können wir nur aus 16 Perlen ein Quadrat legen. 2 Perlen bleiben übrig.
Die Seitenlänge dieses Quadrats aus 16 Perlen ist 4.
Das Verhältnis der großen zur kleinen Quadratseite ist 4 : 3.
Das ist also ein Vergrößerungswert von 1,33... (nach schriftlicher Division).
Die große Seite ist 1,33... mal größer als die kleine Seite.

Aber das ist ja auch nur ein ungefährer Wert, weil bei unserem Versuch zwei Perlen übrig geblieben sind. Also brauchen wir weitere Versuche.
Wir können ein vorbereitetes Tabellenblatt (Kopiervorlage auf der nächsten Seite) verwenden. Unser erstes Ergebnis können wir schon eintragen (die erste Zeile ist bereits ausgefüllt).

Seitenlänge des einfachen Quadrats	Fläche des Quadrats	Fläche des doppelten Quadrats	Angenähertes doppeltes Quadrat	Rest	Seitenlänge des vergrößerten Quadrats	Verhältnis der Quadratseiten	Wert der Vergrößerung
2	2 • 2 = 4	4 + 4 = 8	2 • 2 = 4	4	2	2 : 2	1
3	3 • 3 = 9	9 + 9 = 18	4 • 4 = 16	2	4	4 : 3	1,33
...							

Übrigens: Ich brauchte bei meinen Versuchen zwei Blätter mit der Tabelle, um zu einem befriedigenden Ergebnis zu kommen...

Das verdoppelte Quadrat – Messreihe (Kopiervorlage)

Seitenlänge des einfachen Quadrats	Fläche des Quadrats	Fläche des doppelten Quadrats	Angenähertes doppeltes Quadrat	Rest	Seitenlänge des vergrößerten Quadrats	Verhältnis der Quadrat-seiten	Wert der Vergrößerung
2	$2 \cdot 2 = 4$	$4 + 4 = 8$	$2 \cdot 2 = 4$	4	2	$2 : 2$	1

Das verdoppelte Quadrat – Messreihe (Fortsetzung) (Kopiervorlage)

Seitenlänge des einfachen Quadrats	Fläche des Quadrats	Fläche des doppelten Quadrats	Angenähertes doppeltes Quadrat	Rest	Seitenlänge des vergrößerten Quadrats	Verhältnis der Quadrat-seiten	Wert der Vergrößerung

3. Auswertung der Messreihe

Wir haben bei unseren systematischen Versuchen kein Quadrat entdeckt, das sich mit den Perlen ohne Rest verdoppeln ließe. Aber wir finden Ergebnisse, bei denen nur wenig Perlen übrig blieben, zum Beispiel bei dem Ausgangsquadrat mit 5 und mit 17. (Reihen farblich markieren!) Hier ist also unser Vergrößerungswert am genauesten.

Ausgangsquadrat 5: $a2 : a1 = 7 : 5 = 1{,}4$

Ausgangsquadrat 17: $a2 : a1 = 24 : 17 = 1{,}41\ldots$

Einwurf:

Gibt es denn überhaupt ein Quadrat, das sich verdoppeln lässt und das man mit Perlen ohne Rest legen kann, so dass man den Wert genau erhält?

→ **Oder hast du schon eine Idee, wie man die Seitenlänge des doppelten Quadrats ausrechnen kann?**

Bitte erst umblättern, wenn du mit deinen eigenen Gedanken dazu fertig bist…

4. Rechnung

Ein Schüler erklärte seine Rechnung so:

„Wenn ich einen Wurzelrechner hätte, könnte ich die große Seitenlänge genau ausrechnen.

Wenn man zum Beispiel mit der 2 rechnet,

$$2$$

dann multipliziert man die 2 mit sich selbst

$$2 \cdot 2 = 4$$

und verdoppelt die Zahl.

$$4 \cdot 2 = 8$$

Daraus die Wurzel ist die große Seite (mit Taschenrechner),

$$\sqrt{8} = 2{,}828427125$$

die man wiederum durch 2 dividiert.

$$2{,}828427125 : 2 = 1{,}414213562$$

Dies ist die genaue Verhältniszahl (mit den Stellen, die der Taschenrechner zulässt)."

→ ***Rechne mit weiteren Beispielen!***

→ ***Rechne zum Schluss mit dem Ausgangsquadrat 1.***

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142$$

$$1{,}4142 : 1 = \underline{1{,}4142}$$

Hier ist die letzte Zeile eigentlich überflüssig. $\sqrt{2}$ ist schon der Vergrößerungsfaktor!

Man kann die Rechnung so beschreiben:

Das erste Quadrat hat die Größe 1,
das doppelte Quadrat die Größe 2.
Also suchen wir die Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt.
Dies ist die Wurzel aus 2.

$$\sqrt{2}$$

→ ***Wende nun dein Ergebnis für eine Vorhersage bei einem beliebigen Ausgangsquadrat an.***

Beispiel:

a1 = 15

Dann ist a2 = … ?

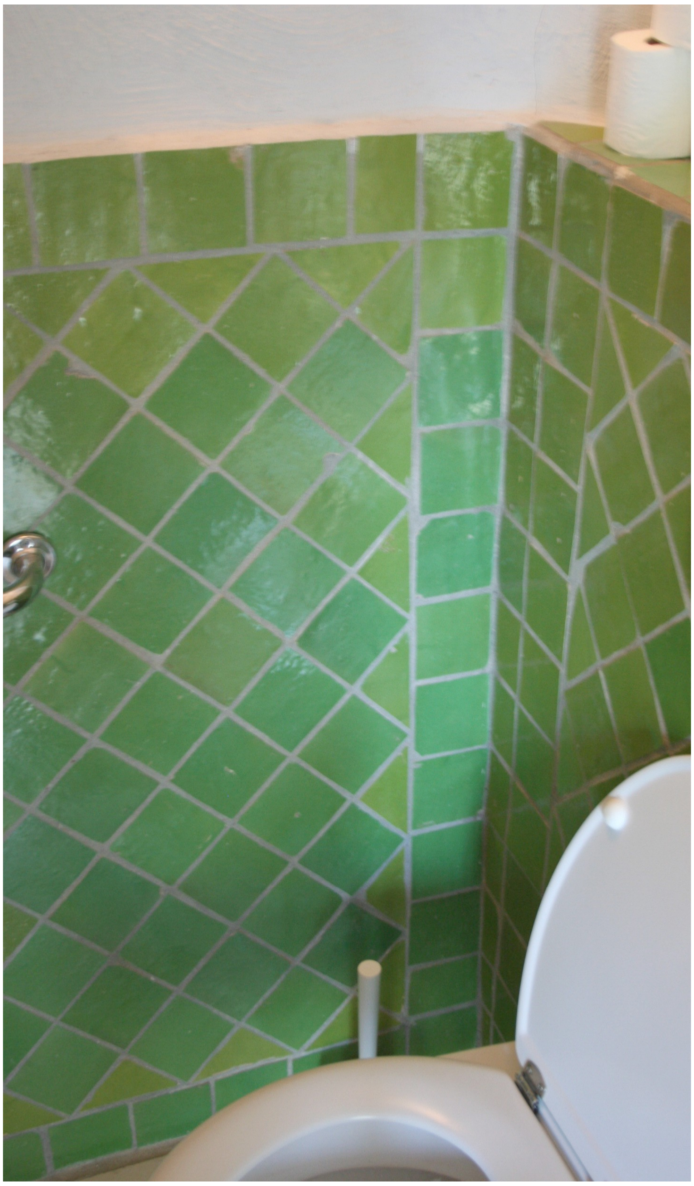
Rechne zur Probe wie auf der vorigen Seite:

15 • 15 = 225 | *das Ausgangsquadrat*

225 • 2 = 450 | *das doppelte Quadrat*

√450 = … | *die Seitenlänge des doppelten Quadrats*

5. Diagonale Fliesenmuster



→ ***Welche Anzahl von Fliesen in der Höhe eignet sich für das Diagonalmuster?***

Mache eigene Versuche!

Anleitung:

- Verwende Papierfliesen 7x7 cm. (Du brauchst gut 50 Stück)
- Klebe sie auf Tonpapier auf. (Einen Bogen mit 50x70 cm, der Länge nach halbiert und zusammengeklebt, so dass ein langer Streifen mit 140 cm Länge entsteht).

→ ***Welche Berechnungen kann man bei dem Muster anstellen?***

→ ***Vergleiche deine Beobachtungen mit den Ergebnissen deiner Messreihe.***

Das verdoppelte Quadrat

Teil 3

– Die Wurzel aus 2 –

1. Die Wurzel

Immer stoßen wir auf die Wurzel aus einer Zahl, am Ende immer auf $\sqrt{2}$.
Mit dem Taschenrechner ist es ganz einfach; er hat die Zahl $\sqrt{2}$ einprogrammiert. Aber wie können wir ohne Computer mit dieser geheimnisvollen Zahl umgehen?

Wir wissen,

$\sqrt{2}$ ist die Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt.

Wenn wir uns das vorstellen, können wir den Wert für $\sqrt{2}$ durch „Annäherung“ ermitteln:

- Beginne mit einem ungefähren (geschätzten) Wert.
- Berechne das Quadrat.
- Ist das Ergebnis zu klein, erhöhe den Wurzel-Wert um einen Schritt.
- Ist das Ergebnis zu groß, verkleinere ihn.
- Verfeinere den Wurzel-Wert durch eine Kommastelle (0,5).
- Springe immer zur Hälfte des Dezimalbereichs (0,2 / 0,7) und taste dich dann schrittweise heran.
- Verfeinere weiter durch eine neue Kommastelle…

Wert für $\sqrt{2}$	***Quadrat***
1	1
2	4
1,5	2,25
1,2	1,44
1,3	…
…	…

→ ***Wie viele Stellen schaffst du?***

Haben die Stellen nach dem Komma kein Ende?

Können wir die Zahl √2 <u>genau</u> beziffern?

Diese Frage hat die Mathematiker schon seit vielen Jahrhunderten und sogar Jahrtausenden beschäftigt.

Die alten Inder schätzen die Wurzel von 2 auf 577 : 408, was mit circa 1,414215686 nah am tatsächlichen Ergebnis ist.

Die Babylonier wie auch die Sumerer schätzten um 1950 v. Chr. die √2 noch auf 1,41. Aus der Zeit um 1800 v. Chr. ist von den Babyloniern eine weitere Näherung überliefert – 30547 : 21600 – das ergibt 1,414212963…, was bereits in fünf Nachkommastellen mit dem tatsächlichen Wert von √2 übereinstimmt.

Mit unseren Quadraten auf dem Wurzelbrett haben wir nach dieser genauen Zahl gesucht. Wenn es zwei Quadrate gäbe, die eine ganzzahlige Länge haben und von denen das eine doppelt so groß ist wie das andere, dann könnten wir die gesuchte Zahl genau angeben – als Verhältniszahl.

Um 500 v. Chr. entdeckte Hippasus aus Metapontum, ein Schüler von Pythagoras und Mitglied des Geheimbundes der Pythagoräer, dass dies offenbar nicht möglich ist.
Für die Pythagoräer war diese Entdeckung eine Katastrophe. In ihrem Weltbild sollte sich alles, was es gibt, in ganzzahligen („rationalen“) Verhältnissen beschreiben lassen. In ihrer Wut sollen die Pythagoräer den Entdecker dieser „irrationalen“ Zahl bei einer Seefahrt über Bord geworfen haben.

Zwei Jahrhunderte später konnte aber Euklid unbezweifelbar beweisen, dass man für $\sqrt{2}$ keinen exakten Wert als Verhältniszahl angeben kann.

Seither haben viele Mathematiker den Ehrgeiz gehabt, die Zahl $\sqrt{2}$ – wenn schon nicht exakt – wenigstens so genau wie möglich auszurechnen.

Heute verwendet man dazu natürlich einen Computer. 1994 errechnete Robert Nemiroff die ersten fünf Millionen Nachkommastellen, indem er seinen Hochleistungscomputer mehrere Wochen lang arbeiten ließ.

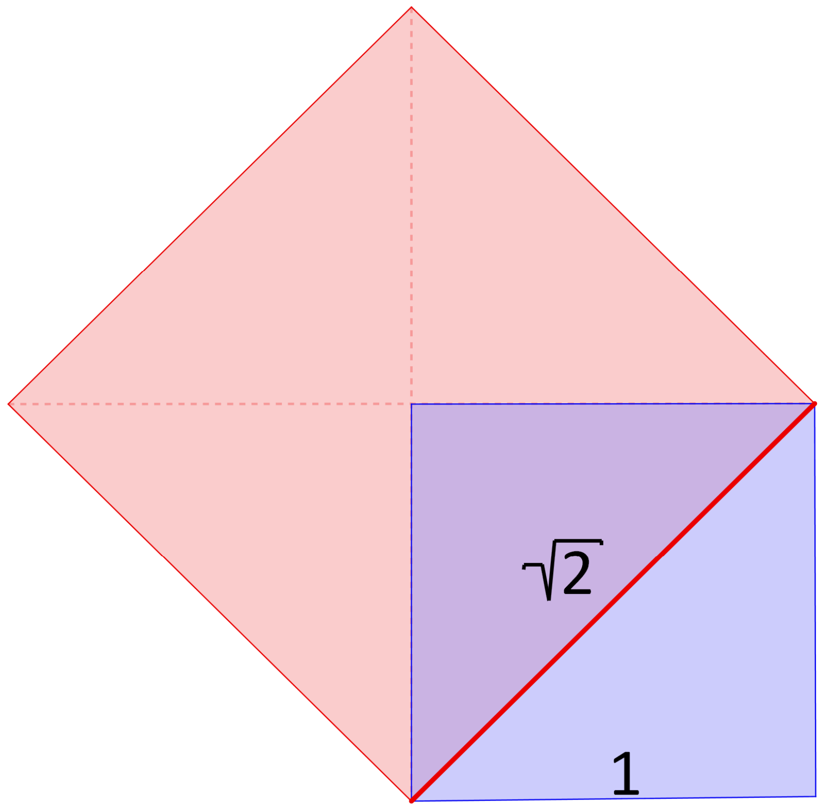
Auf der folgenden Seite findest du die Zahl $\sqrt{2}$ mit den ersten 2863 Stellen nach dem Komma.
(Wie viele Seiten Papier bräuchte es, wenn man die Zahl von Nemiroff ausdrucken wollte?)

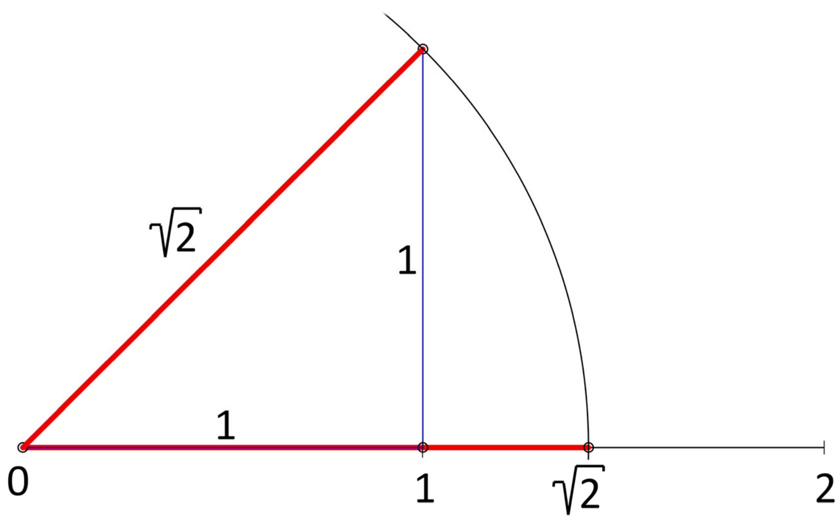
$\sqrt{2}$

1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073247846210703885038
753432764157273501384623091229702492483605585073721264412149709993583141322266592750559275579995050115278206057147010955997160597027
4534596862014728517418640889198609552329230484308714321450839762603627995251407989687253
396546331808829640620615258352395054745750287759961729835575220337531857011354374603408498847160386899970699004815030544027790316454247823068492936918621580578463111596668713013015
6185689872372352885092648612494977154218334204285686060146824720771435854874155657069677653720226485447015858801620758474922657226002085
58446652145839889394437092659180031138824646815708263010059485870400
3186480342194897278290641045072636881313739855256117322040245091227700226941127573627280495738108967504018369868368450725799364729060762
99694138047565482372899718032680247442062926912485905218100445984215
0591120249441341728531478105803603371077309182869314710171111683916581726889419758716582152128229518488472089694633862891562882765952635
14054226765323969461751129160240871551013515045538128756005263146801
71274026539694702403005174953188629256313851881634780015693691768818
52378684052287837629389214300655869568685964595155501644724509836896
03688732311438941557665104088391429233811320605243362948531704991577
17562285497414389991880217624309652065642118273167262575395947172559
34637238632261482742622208671155839599926521176252698917540988159348
64008345708518147223181420407042650905653233339843645786579679651926
72923998753666172159825788602633636178274959942194037777536814262177
38799194551397231274066898329989895386728822856378697749662519966583
52577619893932284534473569479496295216889148549253890475582883452609
65240965428893945386466257449275563819644103169798330618520193793849
40057156333720548068540575867999670121372239475821426306585132217408
83238294728761739364746783743196000159218880734785761725221186749042
49773669292073110963697216089337086611567345853348332952546758516447
10757848602463600834449114818587655554286455123314219926311332517970
60843655970435285641008791850076036100915946567067688360557174007675
69050961367194013249356052401859991050621081635977264313806054670102
93569971042425105781749531057255934984451126922780344913506637568747
76028316282960553242242695753452902883876844642917328277088831808702
53398523381227499908123718925407264753678503048215918018861671089728
69229201197599880703818543332536460211082299279293072871780799888099
17674177410898306080032631181642798823117154363869661702999934161614
87868601804550555398691311518601038637532500455818604480407502411951
84305674533683613674597374423988553285179308960373898915173195874134
42881784212502191695187559344438739618931454999990610758704909026088
35176362247497578588583680374579311573398020999866221869499225959132
76423619410592100328026149874566599688874067956167391859572888642...

2. Konstruktion von $\sqrt{2}$

Es ist unmöglich, die Zahl $\sqrt{2}$ genau zu beziffern, aber erstaunlicherweise können wir die Zahl geometrisch exakt konstruieren. Denke daran, wie du das Papierquadrat ganz zu Beginn verdoppelt hast. $\sqrt{2}$ ist die Diagonale von einem Quadrat mit Seitenlänge 1.



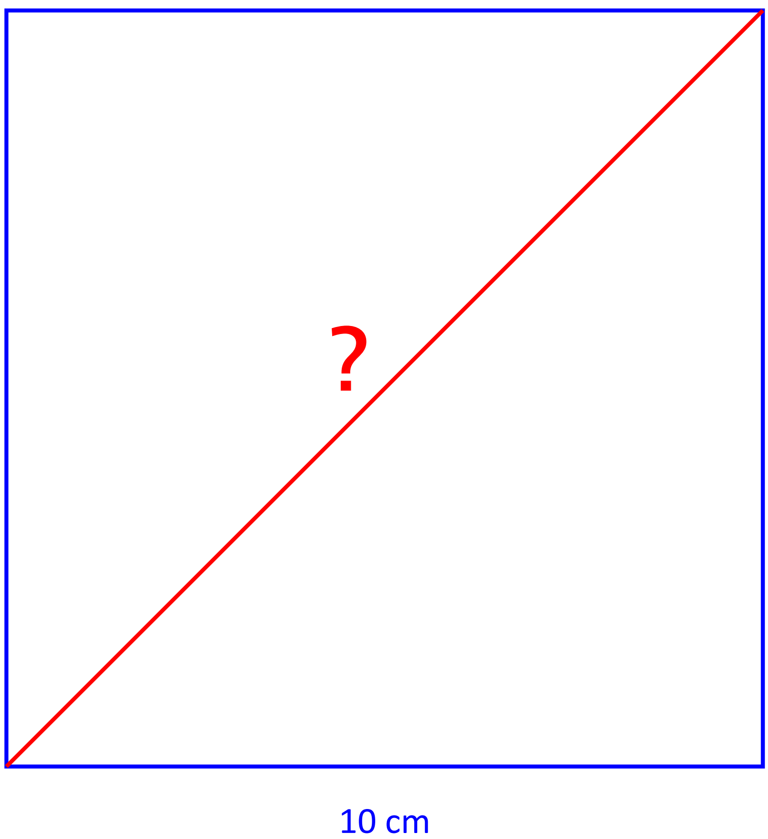


→ ***Führe diese Konstruktion durch!***

3. Messen von $\sqrt{2}$

Wir können natürlich $\sqrt{2}$ auch ziemlich genau bestimmen, wenn wir die Länge der Diagonale eines Quadrats abmessen.

→ ***Zeichne am besten ein Quadrat mit der Seitenlänge 10 cm.***
Wie genau kannst du messen?



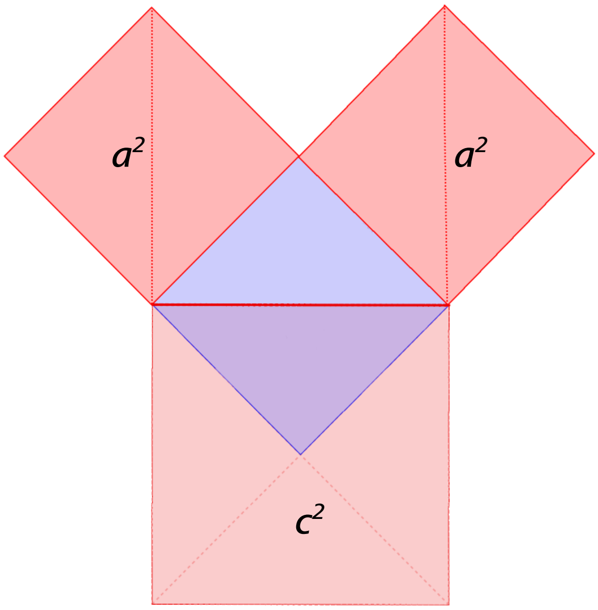
→ ***Das wievielfache der Seitenlänge ist die Diagonale?***

Das verdoppelte Quadrat

Teil 4

– Geometrische Spiele mit der Wurzel –

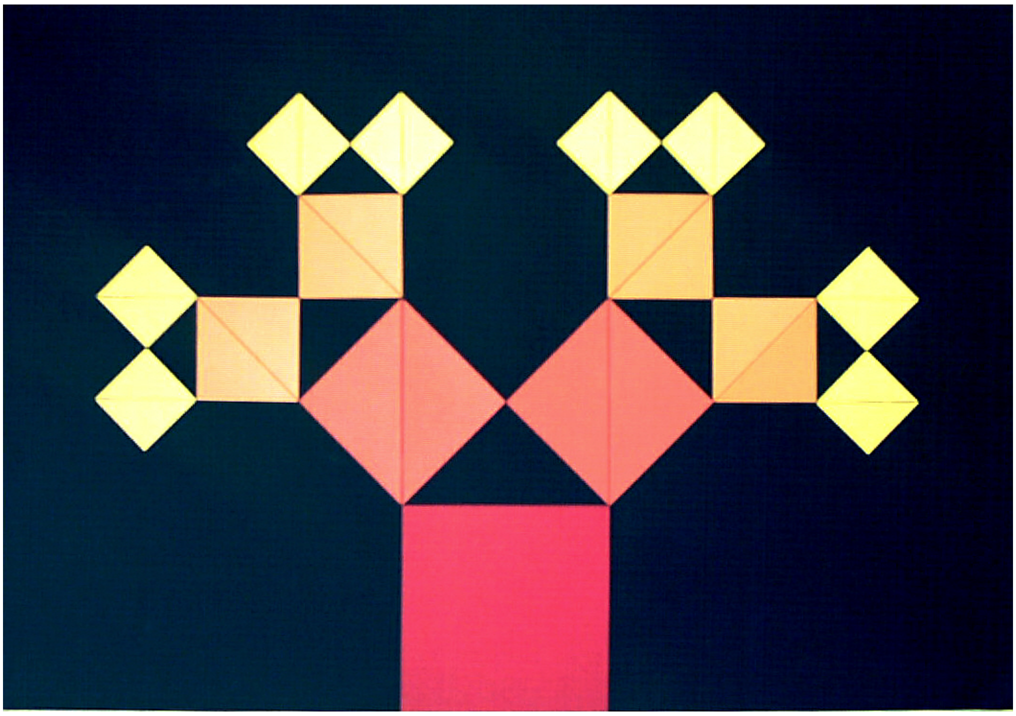
1. Der Satz des Pythagoras



Den berühmten Satz des Pythagoras können wir in dieser Zeichnung schon gut nachvollziehen:

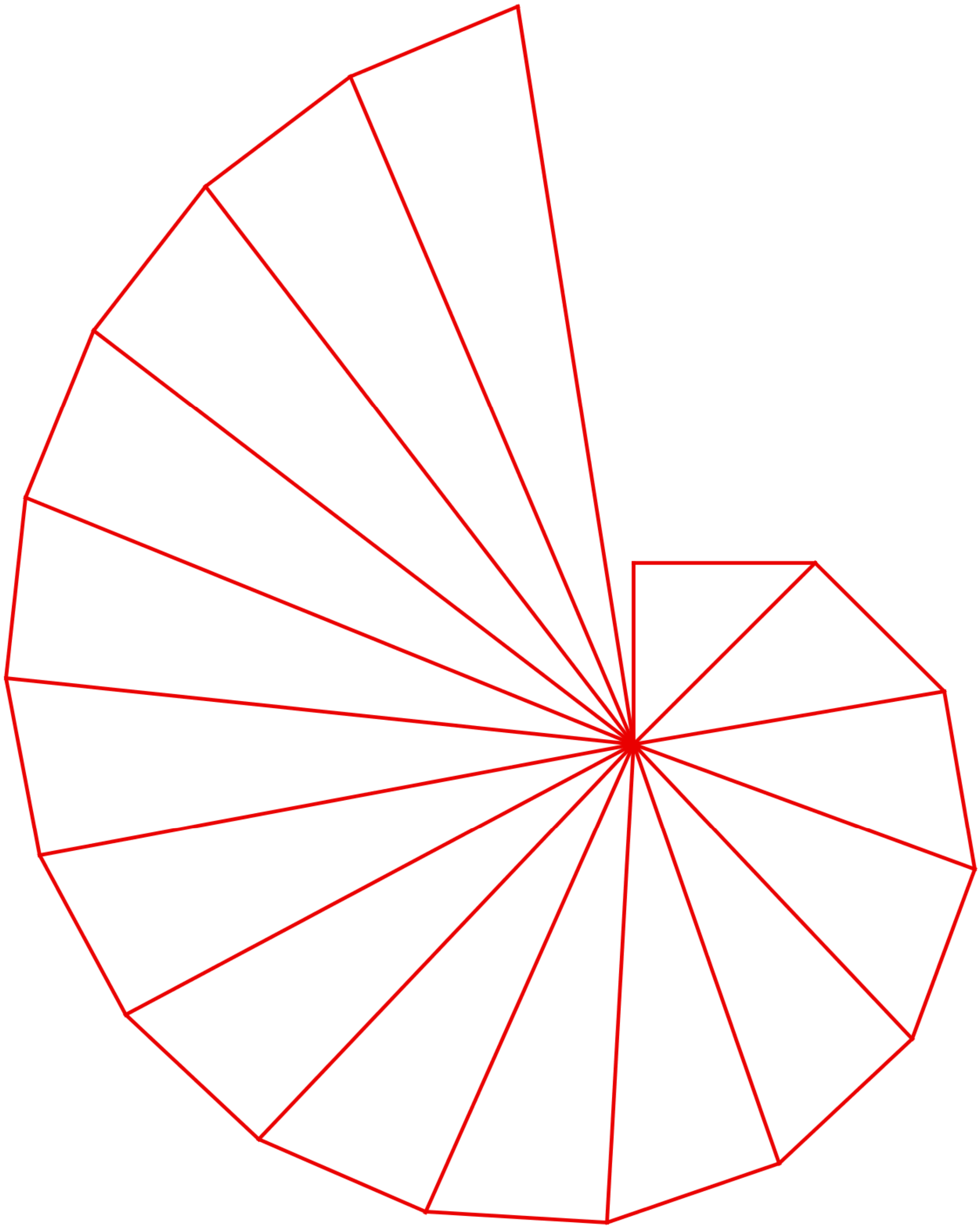
»Die beiden kleinen roten Quadrate sind zusammen so groß wie das große rote Quadrat.«

→ ***Bastle solch einen „Pythagorasbaum“***



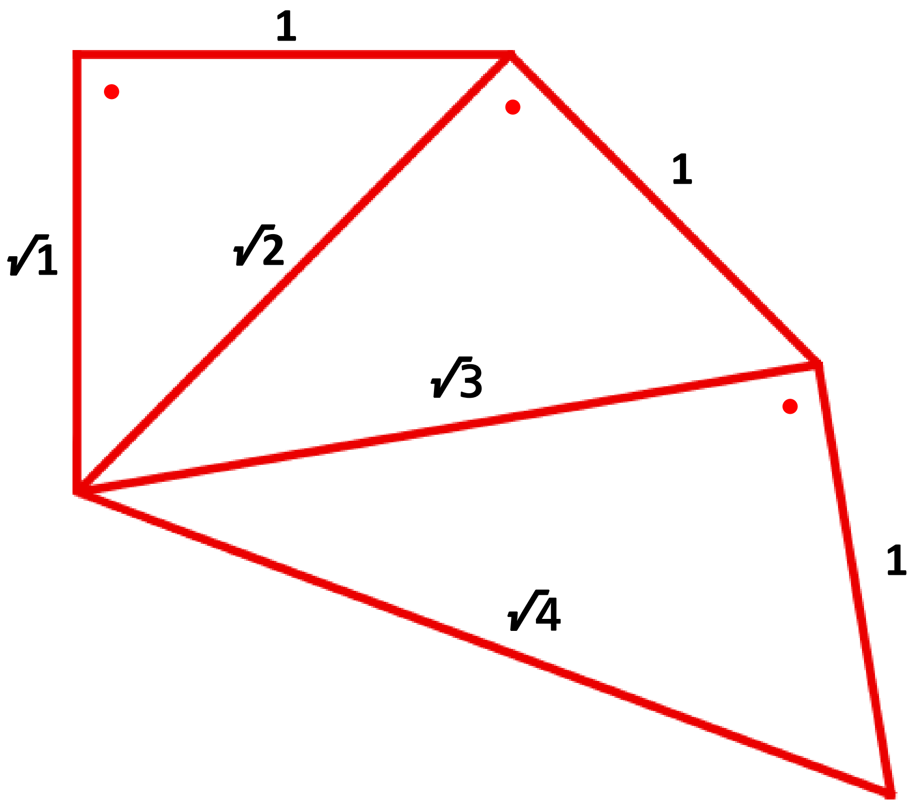
Man könnte ihn unendlich lange fortsetzen. Würde er dann auch unendlich hoch werden?

2. Wurzel-Spirale



→ ***Konstruiere mit Zirkel und Geodreieck!***

Erklärung zur Wurzel-Spirale:



- Beginne mit dem rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreieck.
  (Der rote Punkt bedeutet „rechter Winkel“.)
- Die lange Seite („Hypothenuse“) ist $\sqrt{2}$.
- Zeichne dazu rechtwinklig eine Seite mit Länge 1.
- Es entsteht eine neue Hypothenuse mit $\sqrt{3}$.
  (Das kann man mit dem Satz des Pythagoras ausrechnen.)
- Fahre so fort.
- Bei jedem neuen Dreieck wird die Hypothenuse länger.
  Es entsteht eine Reihe: $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ …

Das verdoppelte Quadrat

Teil 5

– Rechteck-Formate –

1. Seitenverhältnisse bei Rechtecken

Es gibt einen ganz alltäglichen Gegenstand, für den die Zahl $\sqrt{2}$ entscheidend wichtig ist.
Bevor ich ihn verrate, mache bitte einen Versuch:

- Nimm ein quadratisches Papier mit Seitenlänge 20 cm.
- Falte es in der Mitte.
- Miss die Seiten ab.
- Falte es wieder.
- Miss wieder die Seiten.
- Trage die Ergebnisse in eine Tabelle ein und errechne nach jedem Falten das Seitenverhältnis.
- Fahre so fort.

lange Seite	kurze Seite	Seitenverhältnis
20	20	1
20	…	…
…	…	…
…	…	…

→ ***Was stellst du fest?***

Mache diesen Versuch nun mit einem gewöhnlichen DIN A4-Blatt.

lange Seite	kurze Seite	Seitenverhältnis
29,7	21	…
21	…	…
…	…	…
…	…	…

→ ***Was stellst du fest?***

Das Seitenverhältnis beim DIN A4-Papier kennst du – es ist die $\sqrt{2}$.

Es ist das einzige Papierformat, das beim Falten auf die Hälfte immer dieselbe Form behält. Das ist natürlich sehr praktisch und in Deutschland hat man deshalb das Standard-Papier im Jahr 1922 bewusst so festgelegt.

In Amerika wird häufig ein Papier mit den Maßen 216 × 279 mm verwendet. Man nennt dieses Format „US-Letter".

→ ***Untersuche auch dieses Format beim Falten!***

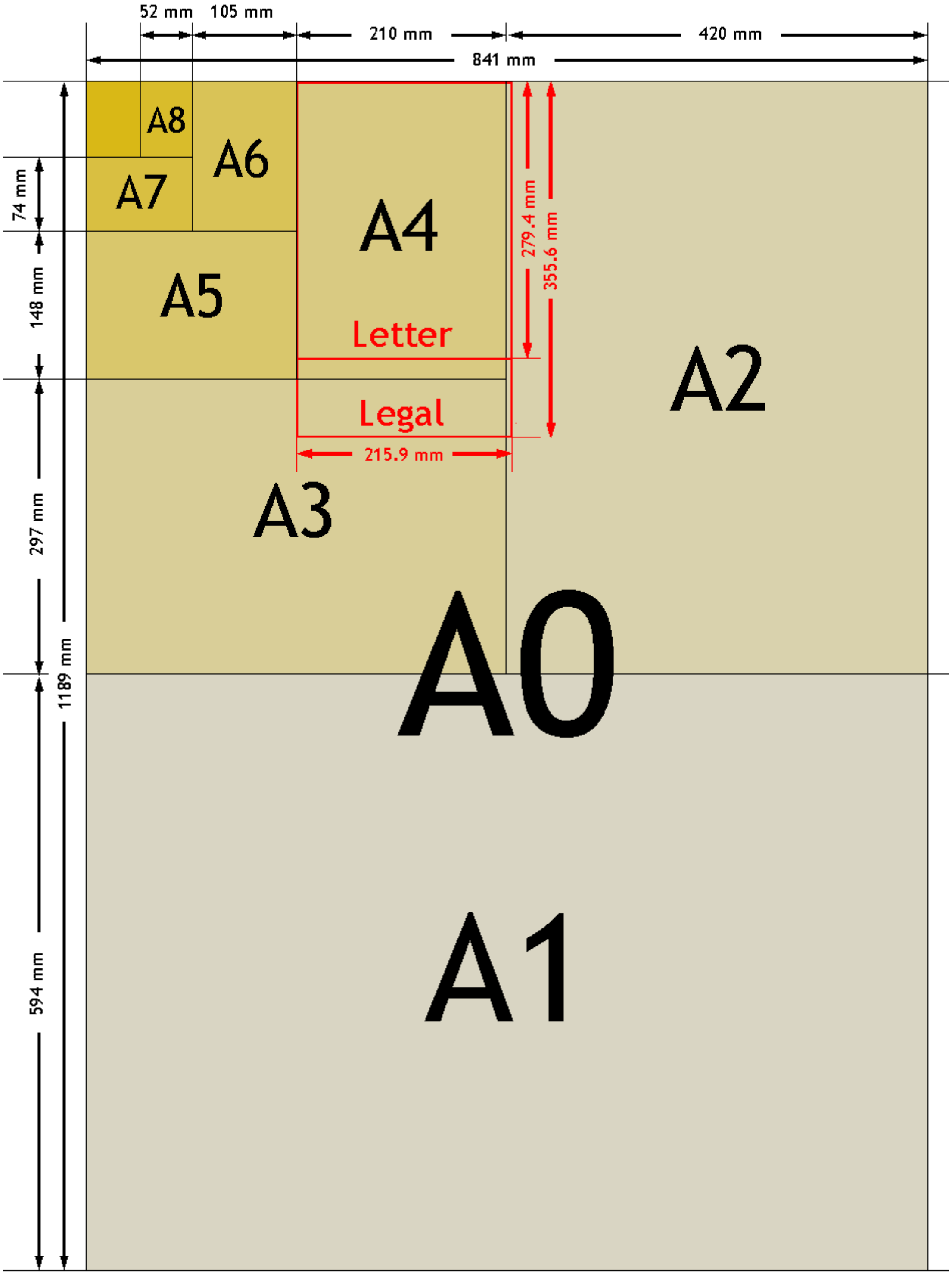
→ ***Formen, die unterschiedlich groß sind, aber die gleiche Form haben, nennt man „ähnlich". Kennst du auch andere „ähnliche" Formen?***

→ ***Warum ist das beim DIN A4-Format so?***
Was hat das mit der $\sqrt{2}$ zu tun? Versuche es zu begründen!

→ ***Zeichne in dein gefaltetes A4-Papier alle kleineren Formate ein. Auf der nächsten Seite siehst du eine Vorlage, bei der auch die größeren Formate als A4 zu sehen sind.***

2. DIN A - Format

DIN ist die Abkürzung für „Deutsches Institut für Normung“.



→ ***Errechne den Flächeninhalt eines Posters in der Größe A0.***

Die Größe A0 ist so gewählt, dass sie genau 1 m^2 groß ist.

Das hat einen großen Vorteil. Man kann so recht leicht das Gewicht eines beliebigen Papiers im DIN-Format errechnen.
Normales Kopierpapier hat zum Beispiel ein Gewicht von 80 g/m^2.
Das bedeutet, ein A0-Poster aus diesem Papier wiegt 80 g.

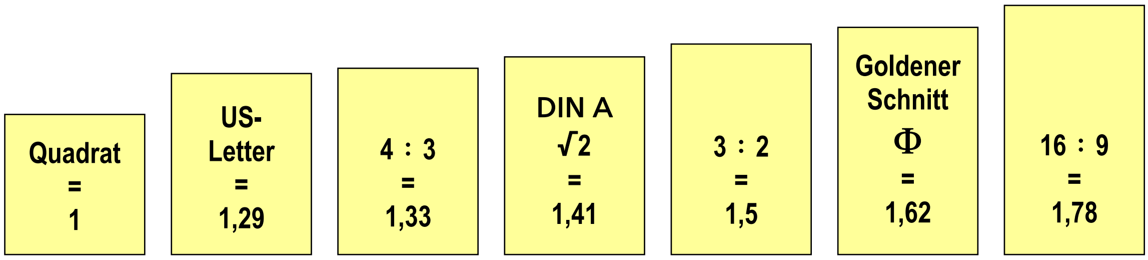
→ ***Wie viel wiegt dann ein A4-Papier, ein A5-Papier usw.?***

→ ***Wie viel wiegt das Papier für dieses Geometriebuch, das aus Papier mit einem Gewicht von 130 g/m^2 hergestellt wurde?***

*****

→ ***Falls du an den komplizierten Beweisen mit Wurzelrechnung Spaß gefunden hast, kannst du dir über diese Frage Gedanken machen:
Wie kam man darauf, dass die Größe A0 (1 m^2) genau 1189 x 841 mm sein muss?***

3. Verschiedene Bild-Formate



1,29 : 1
Das amerikanische Papierformat „US-Letter“.

4 : 3
Das Format eines (älteren) Fernsehers sowie des PC-Bildschirms – im Querformat. Außerdem das Format der Digitalfotos.

√2
DIN A-Format für Papier.

3 : 2
Kleinbildformat für Analog-Fotos.
Viele mittelalterliche Schriften (zum Beispiel die berühmte Bibel von Gutenberg) wurden in diesem Format gestaltet. Es hat sich für Bücher bis heute bewährt.

Φ Goldener Schnitt
Der Goldene Schnitt verkörpert die Proportion, die in der Natur am häufigsten vorkommt und meist als ausgesprochen harmonisch empfunden wird. Er lässt ein vergleichsweise schlankes Blatt entstehen.

16 : 9
Viele Spielfilme sind im Breitbild-Format gedreht – im Querformat.

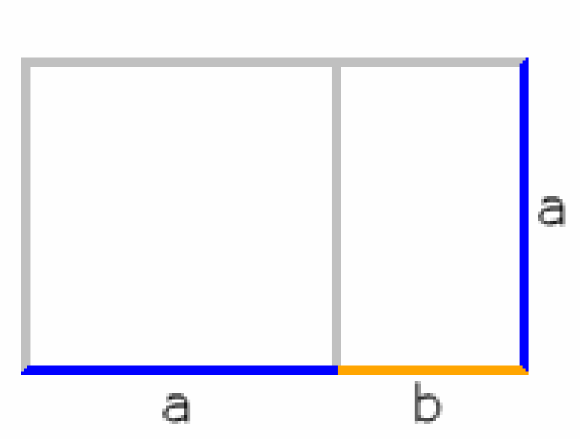
→ ***Schneide für jedes Format ein Papier mit der schmalen Seite von 15 cm.***

4. Der Goldene Schnitt

Nicht nur in der Natur, auch in der Kunst und in der Architektur findet man häufig den Goldenen Schnitt. Damit meint man ein ganz bestimmtes Größenverhältnis, das eine ganz wundervolle Eigenschaft hat:

Die kleine Strecke **b** verhält sich zur großen Strecke **a** genauso,
wie sich **a** zur Gesamtlänge **a+b** verhält.
Das heißt: $a : b = 1{,}618033988...$
Diese Zahl nennt man Φ [griechischer Buchstabe „Phi"].
Φ ist wie $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl mit unendlich vielen Stellen nach dem Komma.

Zum Goldenen Schnitt könnte man unglaublich viel forschen, entdecken und erzählen. Wir beschäftigen uns hier aber nur mit einem Blatt Papier, das ein Seitenverhältnis im Goldenen Schnitt hat. Dieses Blatt kann man nämlich so aufteilen, dass man ein Quadrat erhält und einen Reststreifen. Und dieser Reststreifen ist zu dem Ausgangspapier „ähnlich", das heißt, er hat wieder dasselbe Seitenverhältnis. Also kann man diesen Streifen immer weiter zerteilen, so das immer ein Quadrat und ein „goldenes" Blatt entsteht.



Probiere es aus:
Schneide dir ein Papier im Goldenen Schnitt zurecht. Du kannst ein A4-Papier verwenden und die Breite auf 18,35 cm abschneiden.
(Rechne nach: $29{,}7 : 18{,}35 = 1{,}618... = \Phi$)

- Lege die kurze Seite auf die lange Seite, wie eine Tüte. Die Faltlinie ist die Diagonale eines Quadrats.
- Falte den überstehenden Streifen um. Durch diese Faltlinie wird das Quadrat sichtbar.
- Schneide es ab. Der übrige Streifen behält das Seitenverhältnis im Goldenen Schnitt. Miss nach und rechne nach!
- Wie oft kannst du das Blatt auf diese Weise verkleinern?

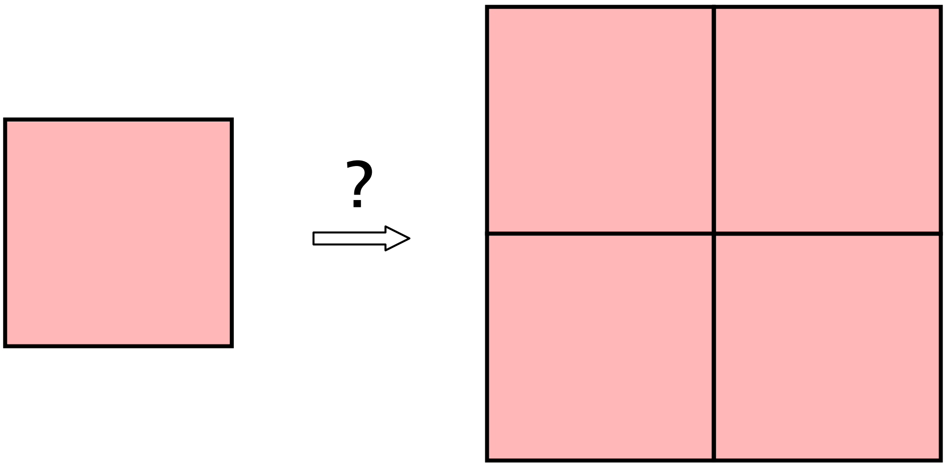
Das verdoppelte Quadrat

Teil 6

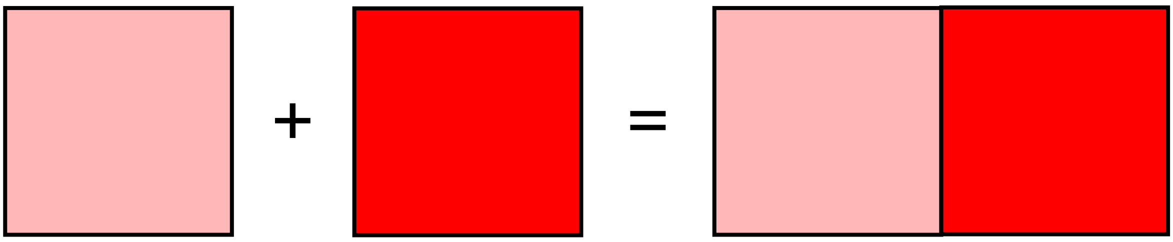
– Didaktischer Kommentar und Lösungen –

Ein sokratischer Dialog (Fassung von Peter Stettler)

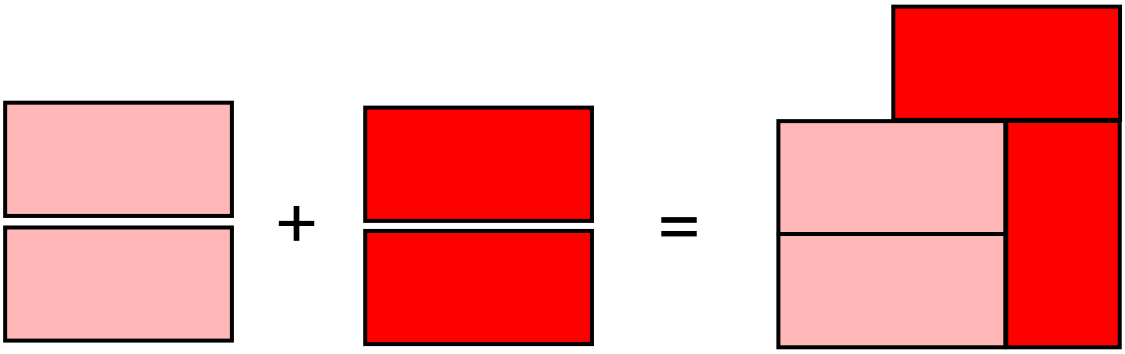
Erster Einfall des Sklaven: Doppelte Seitenlänge.
Das gibt dann aber die vierfache Fläche:



Sokrates:	Die Frage kann noch etwas anders formuliert werden: Zwei Exemplare eines kleinen Quadrats zusammen sollen zu einem einzigen neuen großen Quadrat zusammengefügt werden.



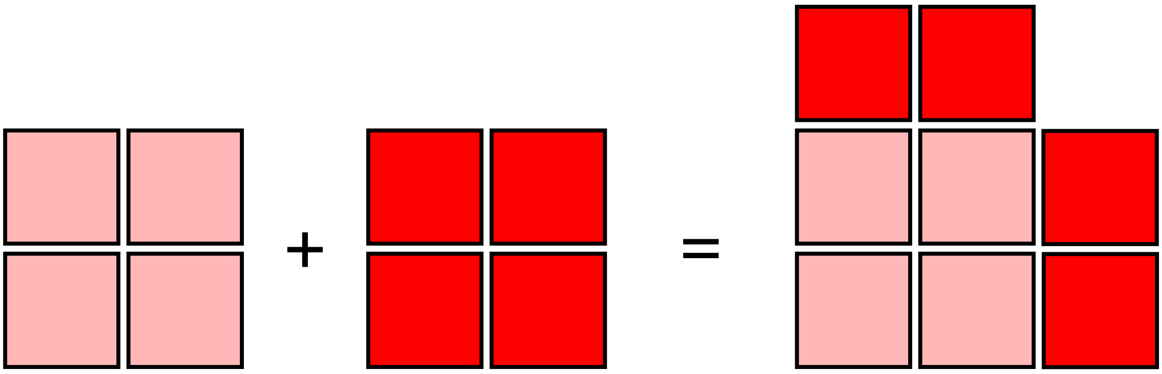
Sklave:	Ja, das gibt kein Quadrat, das gibt ein Rechteck! –
Sokrates:	Es wird nicht verlangt, dass du die Form der zwei Quadrate ganz lässt, nur die Fläche soll erhalten bleiben. –
Sklave:	Die beiden Quadrate brauchen nicht ganz zu bleiben? –
Sokrates:	Schneide nur zu! Hier ist eine Schere. –



Sklave: So geht es nicht, es fehlt etwas. –

Sokrates: Du kannst vielleicht auch anders schneiden! –

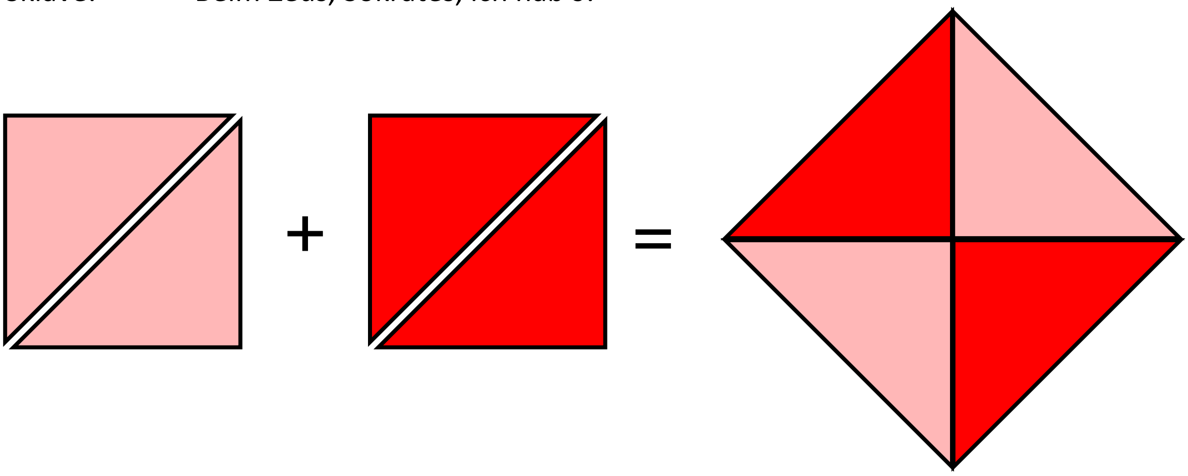
Sklave:



Wieder nichts: Es gibt kein Quadrat! –

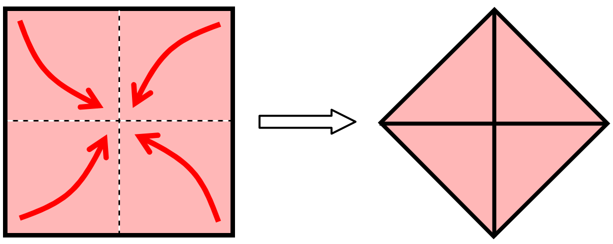
Sokrates: Man kann auch ***ganz*** anders schneiden! –

Sklave: Beim Zeus, Sokrates, ich hab's!



Anmerkung von MW:

Es ist berührend festzustellen, dass das genetische Prinzip dieses Erkenntnisweges bei Kindern seit zweieinhalb Jahrtausenden praktisch unverändert so funktioniert. Trotzdem sollte man darauf achten, dass diese Erfahrung nicht unter der Hand zu einem starren Lehrweg gerät. Eine Schülerin z. B. hatte eine ganz andere Ausgangsidee, mit der sie der Lösung praktisch schon ganz nahe war ohne sich dessen bewusst zu sein. Sie faltete die vier Ecken zur Mitte…



… kam damit aber nicht weiter und verfolgte den Weg wie oben. Am Ende lachte sie über ihren Umweg…

Anmerkungen

zu Seite 7
Modell eines sokratischen Dialogs (siehe Seite 36f und 50ff).

zu Seite 12
Kopiervorlage: Die erste Zeile ist schon ausgefüllt, als Modell, wie die Tabelle verwendet werden soll. Der Ausgangswert 2 wäre zu Beginn ungünstig, weil sich aus 8 Perlen überhaupt kein größeres Quadrat bilden ließe.

Ein Schüler, David, legte die Perlenquadrate nur bis zum Wert 6. Als überzeugter Verfechter des Prinzips "intelligente Faulheit" führte er die weitere Versuchsreihe nur noch schriftlich weiter. Er erkannte die Reihe der Quadratzahlen im Feld "Angenähertes Quadrat" und suchte dementsprechend immer nach der Quadratzahl, die gerade noch unter dem doppelten Quadratwert liegt. Er vermutete, dass es eine vollständige Reihe der Quadratzahlen geben würde und war erstaunt, dass dem nicht so ist. Beispielsweise taucht die 10x10 nicht auf. Eine schöne, staunende Nebenüberlegung.

Ausgefüllte Liste - siehe die beiden folgenden Seiten.

Einwurf („Gibt es denn überhaupt ein Quadrat, das sich verdoppeln lässt und das man mit Perlen ohne Rest legen kann, so dass man den Wert genau erhält?“):
Aus der bisherigen Erfahrung lässt sich diese Frage nicht sicher beantworten. Es ist eine "Gefühlssache", was man vermutet. David bezweifelte, dass es so ein Quadrat gäbe. Er bot mir dafür eine rein gedankliche, rechnerische Lösung für die Aufgabe an (siehe Seite 10):
David verfolgte also gedanklich den vorausgegangenen Handlungsschritt logisch stringent weiter, ohne in diesem Moment über den Begriff von "Wurzel aus 2" zu verfügen.

Wir rechneten mit weiteren Beispielen:

$3 \cdot 3 = 9$	$11 \cdot 11 = 121$
$9 \cdot 2 = 18$	$121 \cdot 2 = 242$
$\sqrt{18} = 4{,}2426$	$\sqrt{242} = 15{,}5563$
$4{,}2426 : 3 = \underline{1{,}4142}$	$15{,}5563 : 11 = \underline{1{,}4142}$

Das verdoppelte Quadrat – Messreihe

Seitenlänge des einfachen Quadrats	Fläche des Quadrats	Fläche des doppelten Quadrats	Angenähertes doppeltes Quadrat	Rest	Seitenlänge des vergrößerten Quadrats	Verhältnis der Quadrat-seiten	Wert der Vergrößerung
2	$2 \cdot 2 = 4$	$4 + 4 = 8$	$2 \cdot 2 = 4$	4	2	2 : 2	1
3	$3 \cdot 3 = 9$	$9 + 9 = 18$	$4 \cdot 4 = 16$	2	4	4 : 3	1,33
4	$4 \cdot 4 = 16$	$16 + 16 = 32$	$5 \cdot 5 = 25$	7	5	5 : 4	1,25
5	$5 \cdot 5 = 25$	$25 + 25 = 50$	$7 \cdot 7 = 49$	1	7	7 : 5	1,4
6	$6 \cdot 6 = 36$	$36 + 36 = 72$	$8 \cdot 8 = 64$	8	8	8 : 6	1,33
7	$7 \cdot 7 = 49$	$49 + 49 = 98$	$9 \cdot 9 = 81$	17	9	9 : 7	1,28
8	$8 \cdot 8 = 64$	$64 + 64 = 128$	$11 \cdot 11 = 121$	7	11	11 : 8	1,37
9	$9 \cdot 9 = 81$	$81 + 81 = 162$	$12 \cdot 12 = 144$	18	12	12 : 9	1,33
10	$10 \cdot 10 = 100$	$100 + 100 = 200$	$14 \cdot 14 = 196$	4	14	14 : 10	1,4
11	$11 \cdot 11 = 121$	$121 + 121 = 242$	$15 \cdot 15 = 225$	17	15	15 : 11	1,36

Fortsetzung

Seiten-länge des einfachen Quadrats	Fläche des Quadrats	Fläche des doppelten Quadrats	Angenähertes doppeltes Quadrat	Rest	Seiten-länge des vergrö-ßerten Quadrats	Verhältnis der Quad-rat-seiten	Wert der Vergrö-ßerung
12	12 • 12 = 144	144 + 144 = 288	16 • 16 = 256	32	16	16 : 12	1,33
13	13 • 13 = 169	169 + 169 = 338	18 • 18 = 324	14	18	18 : 13	1,38
14	14 • 14 = 196	196 + 196 = 392	19 • 19 = 361	31	19	19 : 14	1,35
15	15 • 15 = 225	225 + 225 = 450	21 • 21 = 441	9	21	21 : 15	1,4
16	16 • 16 = 256	256 + 256 = 512	22 • 22 = 484	28	22	22 : 16	1,37
17	17 • 17 = 289	289 + 289 = 578	24 • 24 = 576	2	24	24 : 17	1,41
18	18 • 18 = 324	324 + 324 = 648	25 • 25 = 625	23	25	25 : 18	1,38
19	19 • 19 = 361	361 + 361 = 722	26 • 26 = 676	46	26	26 : 19	1,36
20	20 • 20 = 400	400 + 400 = 800	28 • 28 = 784	16	28	28 : 20	1,4
21	21 • 21 = 441	441 + 441 = 882	29 • 29 = 841	41	29	29 : 21	1,38

zu Seite 13

Jetzt machte ich David auf den Umweg aufmerksam, dass er jedes Mal zuerst eine Zahl mit sich selbst multipliziert und am Ende der Rechnung wieder mit dieser Zahl dividiert.
Ich schlug ihm die Rechnung mit dem Ausgangsquadrat 1 vor – hier ist die letzte Zeile überflüssig. Wurzel aus 2 ist schon der Vergrößerungsfaktor!

Anwendung des Vergrößerungsfaktors:
Beispiel:

a1 = 15
dann ist
a2 = 15 • √2 = <u>21,2132</u>

Probe:

15 • 15 = 225	*| das Ausgangsquadrat*
225 • 2 = 450	*| das doppelte Quadrat*
√450 = <u>21,2132</u>	*| die Seitenlänge des doppelten Quadrats*

zu Seite 15

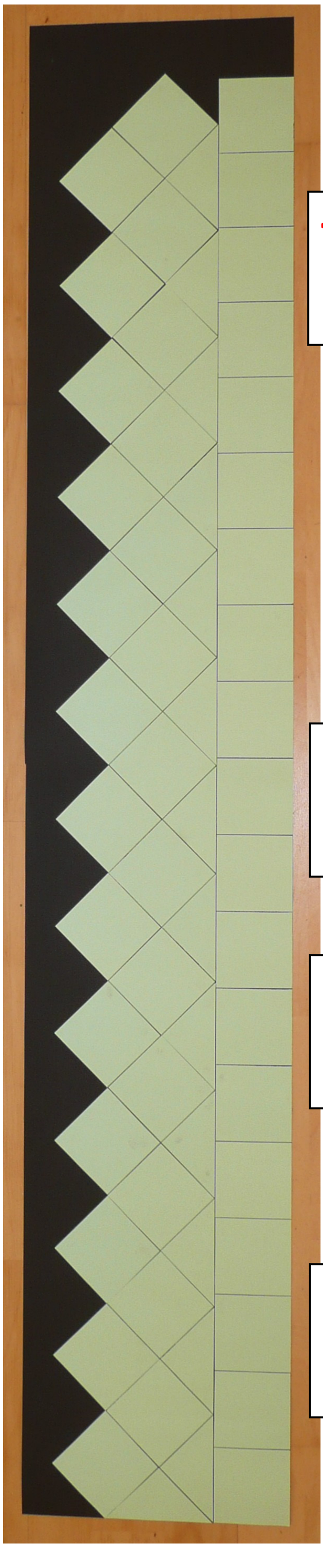
Beim Kleben schmale Abstände zwischen den Fliesen zur besseren Sichtbarkeit lassen.

Die Quadrate (7x7) muss man nicht abmessen; hier geht es nur um die Verhältnisse zwischen Quadratlänge und Quadratdiagonale.

Wurzel aus 2 in Annäherung ermitteln. Gleichungen umstellen nur für sehr Interessierte, eher verbalisieren. (Siehe auch Anmerkung zu Seite 25.)
Zeichen ≈ für „ungefähr“ einführen.

(Lösungsvorschlag: siehe nächste Seite)

Lösungsvorschlag für das Fliesenmuster



< Beste Möglichkeit:
12 Diagonalen entsprechen 17 Quadratseiten
$12 \cdot \sqrt{2} \approx 17$ $\sqrt{2} \approx 17 : 12$ $\sqrt{2} \approx 1{,}416...$ (Der Wert ist etwas zu groß.)

< Drittbeste Möglichkeit:
7 Diagonalen entsprechen 10 Quadratseiten
$7 \cdot \sqrt{2} \approx 10$ $\sqrt{2} \approx 10 : 7$ $\sqrt{2} \approx 1{,}428...$ (Der Wert ist etwas zu groß.)

< Zweitbeste Möglichkeit:
5 Diagonalen entsprechen 7 Quadratseiten
$5 \cdot \sqrt{2} \approx 7$ $\sqrt{2} \approx 7 : 5$ $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ (Der Wert ist etwas zu klein.)

< Viertbeste Möglichkeit:
2 Diagonalen entsprechen 3 Quadratseiten
$2 \cdot \sqrt{2} \approx 3$ $\sqrt{2} \approx 3 : 2$ $\sqrt{2} \approx 1{,}5$ (Der Wert ist etwas zu groß.)

zu Seite 17

Wert für √2	*Quadrat*
1	1
2	4
1,5	2,25
1,2	1,44
1,3	1,69
1,4	1,96
1,45	2,1025
1,42	2,0164
1,41	1,9881
1,415	2,002225
1,412	1,993744
1,413	1,996569
1,414	1,999396
1,4145	2,0008102
1,4142	1,9999616
1,4143	2,0002444
1,41425	2,000103
1,41422	2,0000182
1,41421	1,9999899
1,414215	2,000004
…	…

zu Seite 18

Eine „irrationale Zahl“ ist dadurch gekennzeichnet, dass sie kein Verhältnis von ganzen Zahlen ist. Der Begriff „Ratio“ bedeutet also „Verhältnis“, nicht „Vernunft“, wie es im alltäglichen Sprachgebrauch heißt.

zu Seite 19

Euklid führte den ersten Widerspruchsbeweis in der Mathematik. Die Beweisführung hat folgende Logik: Man nimmt – entgegen der Beweisabsicht – an, dass es ein Verhältnis √2=p/q gibt, dass p und q ganze Zahlen sind und der Bruch p/q nicht gekürzt werden kann. Durch Umformung der Gleichung folgt aber zwingend, dass der Bruch gekürzt werden kann, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Deshalb ist die Annahme falsch und die eigentliche Behauptung richtig. (www.wikipedia.de – Artikel: „Euklids Beweis der Irrationalität der Wurzel aus 2“; www.youtube.com – Clip: „Wurzel 2 ist irrational“)

5 Millionen Stellen: Ausgedruckt wären es ca. 1746 Seiten!

zu Seite 22

Messung: 14,15 cm. Das ist im Verhältnis zu den 10 cm das 1,415-fache.

zu Seite 24

Wie hoch kann der Pythagorasbaum werden? Eine hier völlig nebensächliche Frage, an der ich selbst jedoch beim Basteln unwillkürlich hängen geblieben bin.
Das unterste Quadrat hat die Länge 1. Die nächste „Etage“ mit dem auf der Spitze stehenden Quadrat ist ebenfalls 1 hoch. Etage 2 und 3 sind jeweils halb so hoch wie die unteren.
Es entsteht eine doppelte Reihe der Form: 1+1/2+1/4+1/8… Diese Reihe strebt gegen 2.
Der Pythagorasbaum kann also maximal 4 Mal so hoch wie das Ausgangsquadrat werden.

zu Seite 26

Am Beispiel des zweiten Dreiecks: $c^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 \rightarrow c = \sqrt{3}$

zu Seite 28

Quadratisches Papier:

lange Seite	kurze Seite	Seitenverhältnis
20	20	1
20	10	2
10	10	1
10	5	2

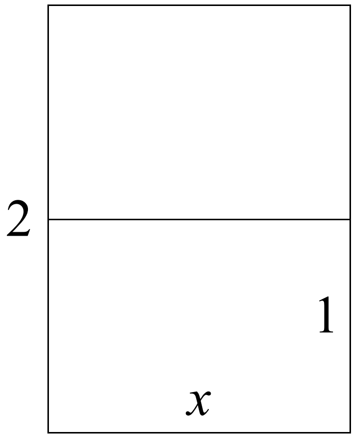
DIN A4-Papier:

lange Seite	kurze Seite	Seitenverhältnis
29,7	21	1,41
21	14,85	1,41
14,85	10,5	1,41
10,5	7,42	1,41

zu Seite 29

Der Zusammenhang zwischen DIN-Format und $\sqrt{2}$:

Man kann das Seitenverhältnis auf verschiedene Weisen herleiten. Am elegantesten vielleicht so:



Wir suchen ein Rechteck, für das gilt:

$\frac{x}{1} = \frac{2}{x}$ *(das Seitenverhältnis soll gleich sein)*

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$

David, mein „Versuchskaninchen“, konnte den Beweis erwartungsgemäß nicht führen, wollte ihn aber von mir unbedingt demonstriert haben. Am interessantesten war für ihn dabei, dass er erkannt hat, wie man Gleichungen aufstellen und nach x auflösen kann – eine neue Welt tat sich ihm auf.

zu Seite 31

Papiergewicht:

A4 ist ein Sechzehntel von A0: 80 : 16 = 5 g

A5 ist ein Zweiunddreißigstel von A0: 80 : 32 = 2,5 g

Das Papier für das vorliegende Buch mit 50 Seiten wiegt ca. 400 g.

Zur Herleitung der Größe A0:

Wir haben zwei Festlegungen:

$$a \cdot b = 1m^2 \qquad \text{und} \qquad b = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{a \cdot a}{\sqrt{2}} = 1m^2$$

$$a^2 = \sqrt{2}m^2$$

$$a = \sqrt{\sqrt{2}}\ m$$

$$a = 1{,}189\ m \ \mid\ b = 0{,}841\ m$$

Quellenachweise

1. Texte

Peter Stettler: Verstehen lehren nach Wagenschein, in: Montessori Aktuell 2/98, S. 16 - 23 (Zeitschrift der Österreichischen Montessori-Gesellschaft)

Martin Wagenschein: „Der antike Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2“ in: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken, Bd. I, S. 138-151 und in: Naturphänomene sehen und verstehen, S. 237-250

Martin Wagenschein: Verstehen lehren. Mit einer Einführung von Hartmut von Hentig, Weinheim und Basel 1999

Axel Holtz/Peter Stettler: Kinder und Jugendliche anders lernen lassen. Maria Montessori und Martin Wagenschein im Dialog, Ulm 2001

Hans Magnus Enzensberger: Der Zahlenteufel, München 1999

Alle Platon-Texte sind verfügbar unter http://gutenberg.spiegel.de

Wikipedia (www.wikipedia.org) Artikel „Wurzel 2“, „Euklids Beweis der Irrationalität der Wurzel aus 2“, „Menon (Platon)“, „Papierformat“, „Goldener Schnitt“

DIN-Papier/Goldener Schnitt: www.brefeld.homepage.t-online.de/goldener-schnitt.html

Menon-Dialog: www.informationstechnikadam.de/inft/themen/05sokrates.htm

Heinrich Watzka: Die Nichtlehrbarkeit der Philosophie als hochschuldidaktische Herausforderung, www.sankt-georgen.de/leseraum/watzka4.pdf

Gregor Nickel: Zwingende Beweise — zur subversiven Despotie der Mathematik, www.fa.uni-tuebingen.de/members/grni/Zwingende-Beweise.pdf

L. Führer: Wurzeln, Mathematik und Nostalgie – Bedenkliches zum mathematischen Wagenschein, www.math.uni-frankfurt.de/~fuehrer/forschung/Wagenschein.pdf

2. Bilder

Soweit nicht anders angegeben, sind alle Zeichnungen von mir (MW). Einige Grafiken wurden mit der Software „Zirkel und Lineal“ (www.z-u-l.de) erstellt.

Titelseite (Sokrates): www.michaelmaxwolf.de

Titelseite (Euklid): Wikipedia

Seite 5 (Sokrates): http://z.about.com/d/goitaly/1/0/0/5/-/-/colosseum-statue-socrates.jpg

Seite 18 (Tontafel): www.lehrkunst.ch

Seite 19 (Euklid): Wikipedia

Seite 30 (DIN): http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b7/A_size_illustration.png

Seite 33 (Goldener Schnitt): Wikipedia

3. Impressum

Anhang

Der „Menon-Sokrates-Dialog“ von Platon (siehe Seite 50)

Es wurde bereits gesagt, dass Platon mit seinem Dialog kein fachdidaktisches Lehrstück beschreibt. Der Dialog dient ihm als Argument für seine erkenntnistheoretische These, dass das, was wir Lernen nennen, in Wahrheit Wiedererinnerung ist.

Sokrates führte einen Diskurs mit Menon über die Frage, ob Tugend lehrbar sei. „Ist Tugend lehrbar?“ „Was ist Tugend?“ „Wie lässt sich überhaupt etwas definieren?“ „Kann ich etwas suchen, dessen Definition ich noch nicht kenne?“

Menons Argument führt zu einem grundlegenden Paradoxon: Es ist dem Menschen nicht möglich zu forschen, weder nach dem, was er weiß, noch nach dem, was er nicht weiß. Nach dem, was er weiß, wird er nicht forschen, denn er weiß es bereits. Nach dem, was er nicht weiß, kann er nicht forschen, denn er weiß nicht, wonach er forschen soll. Also: Entweder man braucht es nicht zu lernen, oder man kann es überhaupt nicht.

Sokrates’ Lösung lautet, dass Nichtwissen im Grunde verborgenes Wissen ist und durch entsprechende Verfahren jederzeit aktiviert werden kann. Dies möchte er mit seinem Experiment mit dem Sklaven beweisen. Sokrates legt es darauf an, dass er den Sklaven nichts lehrt, sondern alles nur erfragt.

Der Sklave findet die Lösung in einem dreistufigen Prozess: Zuerst glaubte er, eine Antwort zu wissen. Sokrates zeigt ihm aber durch seine Nachfragen, dass diese Antwort nicht stimmen kann. Der Sklave sieht dies ein, kommt aber dadurch in eine hilflose, ja auswegslose Situation. Sokrates fordert dies bewusst heraus. Solange der Mensch die Antwort ungeprüft und unverteidigt zu kennen glaubt, reizt ihn nichts zur Suche; die Erkenntnis des eigenen Unvermögens, der Schmerz der Aporie, öffnet ihn für weitere Fragen und spornt ihn zur Lösungssuche weiter an. Der „Aha“-Effekt am Schluss des Lernprozesses wird als Wiedererinnern gedeutet. Nachdem die Lösung klar ist, scheint es, als wäre sie schon immer klar gewesen. Was zuvor unlösbar erschien, ist hernach trivial.

In den Worten Sokrates: „In dem Nichtwissenden also sind von dem, was er nicht weiß, dennoch richtige Vorstellungen. Indem ihn niemand belehrt, sondern nur ausfragt, wird er wissen und wird die Erkenntnis nur aus sich selbst hervorgeholt haben.“ Für unser Beispiel lässt sich folgern: Allgemeingültige Sätze wie die der Geometrie sind als Bewusstseinsstrukturen im Menschen bereits angelegt. Kant würde zweitausendzweihundert Jahre später sagen, sie sind „a priori“.

Auf die Philosophie bezogen heißt das: Sokrates „lehrt“ nicht Philosophie, – nicht, weil er keine besäße, sondern weil die Seele nicht wirklich weiß, was sie weiß, wenn sie es nicht aus sich selbst gewonnen hat und sich und anderen Rechenschaft darüber geben kann. Philosophie ist Anleitung zum Selberdenken.

Die „sokratische“ Methode

„Pädagogik hat mit dem Werdenden zu tun: mit dem werdenden Menschen und – im Unterricht, als Didaktik – mit dem Werden des Wissens in ihm. Die sokratische Methode gehört dazu, weil das Werden, das Erwachen geistiger Kräfte, sich am wirksamsten im Gespräch vollzieht.“ (Wagenschein, UveD II, zit. n. Stettler, 22)

Das Ziel des Lernens ist dieser „Aha“-Moment, dieses „heureka“, ein Wissen, das einen Durchgang durch das Nichtwissen gemacht hat und sich seiner selbst bewusst ist. Es ist nicht das Ziel, wie es bei Sokrates der Fall war, mit der Demonstration des Lernweges des Sklaven gleichzeitig ein erkenntnistheoretisches Postulat zu erläutern. Die Frage ist deshalb, inwiefern die sokratische Methode unserem pädagogischen Ziel dient und welche weiteren Faktoren damit zusammenhängen.

Man darf davon ausgehen, dass der (namenlose) Sklave am Ende des Gesprächs zufrieden war. Er war bis zum Ende konzentriert und blieb anstandslos in seiner Rolle. Man kann ebenso davon ausgehen, dass sich viele Leser bei der Vorstellung, sie wären in der Rolle dieses „Schülers“, unwohl fühlen würden. Es ist kein symmetrisches Gespräch auf Augenhöhe; das Gespräch folgt einer Dramaturgie im Hintergrund, die darauf angelegt ist, mich in eine Aporie zu verwickeln – um mich anschließend geduldig wieder aufzurichten. Menschen reagieren unterschiedlich sensibel auf solch ein Arrangement.

Ist der Sokrates-Dialog suggestiv? Der Sklave hatte kaum eine Möglichkeit, das Gespräch zu beeinflussen. Seine Antworten sind innerhalb des Arrangements mit dem Wissensgefälle kalkulierbar – wenn er sich denn darauf einlässt.
Spielt das Sklavenverhältnis eine Rolle? Der Sklave konnte sich nicht entziehen, er wurde nicht gefragt, ob er auf die Lektion Lust hätte. Aber das Sklavenverhältnis hat philosophisch noch eine ganz andere Ebene. Er ist zwar das zufällige, namenlose pädagogische „Opfer“ für die sokratische Demonstration, aber in dieser Beliebigkeit liegt auch eine Pointe. Jeder (der das Diagonalen-Problem noch nicht kennt), auch ein mächtiger Herrscher, wäre in einem vergleichbaren Dialog zur gleichen Einsicht „gezwungen“ gewesen.

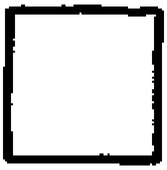
Das Problem liegt weniger im Grad der Suggestion und auch nicht in der sozialen Stellung. Aber der überlieferte Dialog will mir nicht recht sympathisch werden. Es ist vielleicht eher die nervende Penetranz und Enge dieses „fragend-entwickelnden Unterrichts“, die das Unwohlsein auslöst. Ich möchte stichwortartig einige Aspekte aufzählen, die m. E. zu einem gelingenden sokratischen Gespräch beitragen:

- Niemand wird beschämt. Vorsicht mit der Aporie. Keine Ironie.
- Achtung des „Halbwissens", ordnende Hilfestellung
- Offenheit, Muße, Fabulieren, Kreativität, Umwege, Holzwege
- Humor, Lachen, Spaß, Ärgern, Emotionalität
- Elemente von Rollentausch oder ausgeglichenen Rollen
- Empathie, Mitfreuen
- Montessoris Beschreibung des „ich baue mich selbst auf" braucht eine gewisse Unabhängigkeit vom Erwachsenen.
- Eigene, unabhängige Erkundungen und Erfahrungen zulassen/arrangieren.
- Unterschiedliche soziale Bedürfnisse achten: viel/wenig Kontakt zum Lehrer, mit/ohne Partner
- Unterschiedliche Sprachniveaus achten: viel/wenig verbalisieren, sprachfreie Erkenntnisse arrangieren, Handlungsmöglichkeiten
- Situative Entscheidungen über Input-Teile und die Bitte „erkläre es mir!".
- Offene Zeitdimension, reifen lassen, abbrechen, anknüpfen, aufgreifen
- Raum für Metaebene, Reflexion der Lernbedingungen

„Vor zweieinhalb Jahrtausenden ging Sokrates durch die Straßen Athens und brachte seinen Landsleuten das Fragen wieder bei: das Zutrauen zu dem, was sie selber von der Welt sehen und verstehen konnten, gegen die Fülle vorgegebener Weisheit – alter und neuer –, wenn sie's nur wagten… Wagenschein ist freundlicher als Sokrates, aber er tut das Gleiche mit der gleichen Unerbittlichkeit. Er fragt nicht jedermann, wie Sokrates; er fragt meist auch nicht die ihm anvertrauten jüngeren Schüler (von denen lässt er sich lieber fragen) – er fragt die Abiturienten, die Studenten, die Lehrer…"
(Hartmut von Hentig, Vorwort zu M. Wagenschein, verstehen lehren, S. 7)

Auszug aus dem „Menon-Sokrates-Dialog“ von Platon

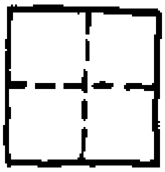
(Quelle: www.informationstechnikadam.de/inft/themen/05sokrates.htm)



Menon ruft auf Geheiß von Sokrates einen seiner jungen Sklaven.

Sokrates: Sag, mein Junge, siehst du dieser viereckigen Fläche hier an, dass Sie ein Viereck ist?

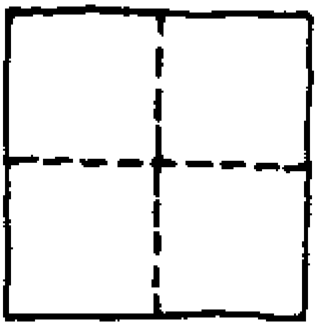
Sklave: Ja.



Sokrates: Es ist doch ein Viereck mit vier gleich langen Seiten- diesen hier?

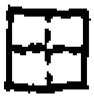
Sklave: Ja.

Sokrates: Sind nicht auch diese beiden Mittellinien hier gleich lang?

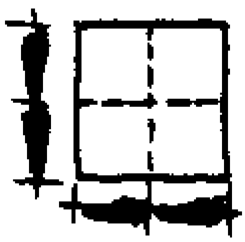


Sklave: Ja.

Sokrates: Man könnte sich eine solche Figur doch auch größer oder aber kleiner denken?

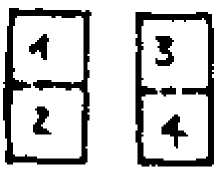


Sklave: Freilich.



Sokrates: Wenn nun diese Seite zwei Fuß lang wäre und diese hier auch zwei Fuß, wie viel Fuß betrüge das Ganze? - Überlege es Dir Sokrates: Wenn die Strecke auf dieser Seite der Figur zwei Fuß lang wäre, auf jener aber nur ein Fuß, dann würde die Figur doch ein mal zwei Fuß enthalten, nicht wahr ? Da es aber auch auf dieser Seite zwei Fuß sind, kommen da nicht zwei mal zwei Fuß heraus?

Sklave: So ist es.

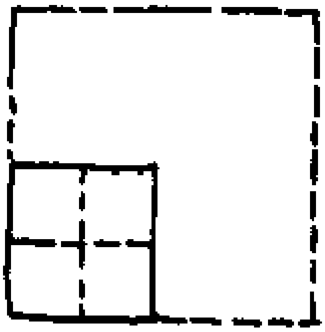


Sokrates: Die Figur enthält also zwei mal zwei Fuß. Wie viel zwei mal zwei Fuß sind, das rechne nun aus und sage es mir!

Sklave: Vier, mein Sokrates.

Sokrates: Ließe sich nun ein zweites, doppelt so großes Viereck herstellen, und zwar von der gleichen Art, also mit gleichlangen Seiten wie bei diesem hier?

Sklave: Ja



Sokrates: Wie viel Fuß wird dieses Viereck dann enthalten?

Sklave: Acht.

Sokrates: Gut, mein Junge! Nun versuch aber, mir zu sagen, wie lang jede Seite in diesem Viereck sein wird: Die Seitenlänge unseres Vierecks hier ist zwei Fuß. Wie lang wird die Seite des doppelt so großen Viereckes sein?

Sklave: Offenbar doppelt so lang mein Sokrates.

Sokrates: (an Menon gewandt): Siehst du, Menon, wie ich nichts lehre, sondern alles nur erfrage? Und jetzt glaubt er zu wissen wie groß die Seite ist, die das achtfüßige Quadrat ergeben soll. Oder scheint es dir nicht so zu sein?

Menon: Doch, gewiss.

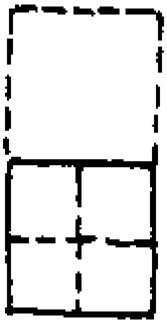
Sokrates: Aber weiß er es denn wirklich?

Menon: Natürlich nicht.

Sokrates: Er glaubt aber es sei die doppelte Seitenlänge.

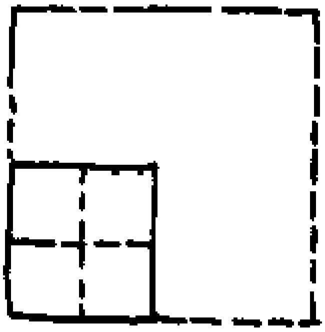
Menon: Das tut er.

Sokrates: Lass dir nun also zeigen, Menon, wie er sich Schritt für Schritt besinnt, gemäß dem Wesen der Wiedererinnerung.



(zum Sklaven) Sag mir, mein Junge, nach deiner Behauptung soll doppelte Seitenlänge das doppelte Viereck ergeben? Ich meine das aber nicht so, dass es in dieser einen Richtung lang, in der Anderen aber kurz bleiben soll. Ich meine es so: Es soll wieder in allen Seiten gleich lang sein wie dieses Viereck hier, nun aber doppelt so groß, nämlich achtfüßig. Bist du noch immer der Ansicht, dass die Verdoppelung der Seitenlänge dieses Viereck ergeben wird?

Sklave: Ja, ich bleibe dabei.

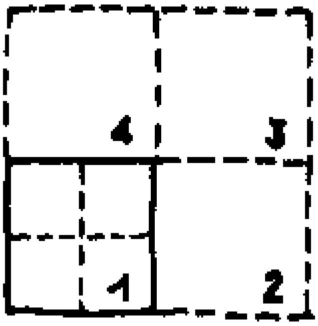


Sokrates: Erhält nun nicht diese Seite hier die doppelte Länge, wenn wir ihr eine gleich lange Strecke von diesem Punkt aus anfügen?

Sklave: Sicher.

Sokrates: Diese verdoppelte Strecke also, so behauptest du, soll das achtfüßige Viereck ergeben, wenn man vier Seiten dieser Länge bildet?

Sklave: Ja.



Sokrates: So lass uns mit dieser doppelt so langen Strecke ein Viereck mit lauter gleichen Seiten konstruieren. Dann muss dieses Viereck hier dasjenige sein, das du für ein achtfüßiges ausgibst?

Sklave: Allerdings.

Sokrates: Sind aber nicht in ihm diese vier Quadrate enthalten, von denen jedes einzelne dem ersten, dem vierfüßigen, gleich ist?

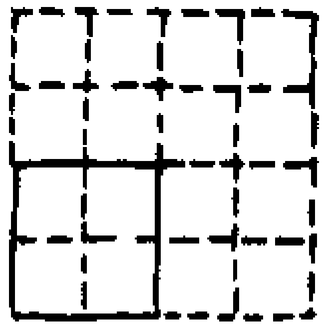
Sklave: Ja, das stimmt.

Sokrates: Wie groß also muss es sein? Doch viermal so groß:

Sklave: Ohne Zweifel.

Sokrates: Was nun viermal so groß ist, ist das dann das Doppelte?

Sklave: Niemals.



Sokrates: Also das Wievielfache?

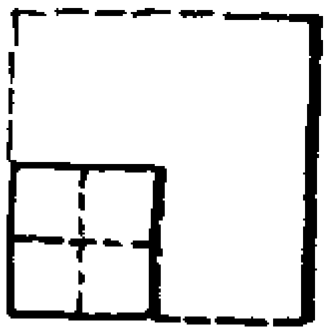
Sklave: Das Vierfache.

Sokrates: Also, mein Junge: Die doppelte Seitenlinie ergibt nicht das doppelte, sondern das vierfache Quadrat.

Sklave: Du hast Recht.

Sokrates: Denn vier mal vier ist sechzehn, nicht wahr?

Sklave: Richtig.



Sokrates: Welche Linie ergibt nun aber das achtfüßige Quadrat? Diese hier ergibt doch das Sechzehnfache?

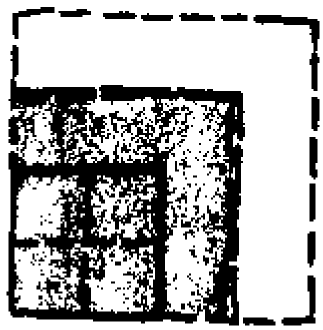
Sklave: Ja.

Sokrates: Die Hälfte aber hiervon ergibt das vierfüßige Quadrat?

Sklave: Ja.

Sokrates: Gut. ist das gesuchte achtfüßige Quadrat nicht das Doppelte von diesem da und die Hälfte von jenem?

Sklave: Ja.



Sokrates: Muss also die Seite dieses gesuchten Quadrates nicht größer sein als diese, dagegen kleiner als jene?

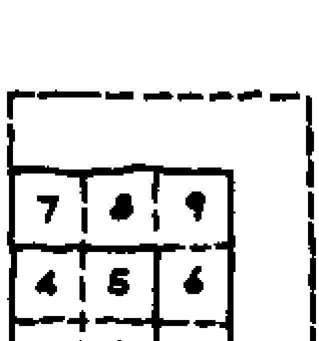
Sklave: Meiner Meinung nach, ja.

Sokrates: Schön; denn nichts anderes als deine Meinung sollst du in deiner Antwort zum Ausdruck bringen. Sag mir also: war diese Seite nicht zwei Fuß lang, jene aber vier Fuß lang?

Sklave: Ja.

Sokrates: Es muss also doch die Seite des achtfüßigen Quadrates größer sein als diese zweifüßige Seite hier, aber kleiner als die vierfüßige Seite?

Sklave: So muss es sein.



Sokrates: Versuche also, mir zu sagen, wie lang sie deiner Meinung nach sein muss!

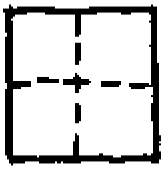
Sklave: Drei Fuß lang.

Sokrates: Wenn sie also drei Fuß lang sein soll, dann müssen wir doch die Hälfte dieser Seite anfügen, um sie dreifüßig zu machen? Diese Seite hier beträgt ja zwei Fuß, diese da einen Fuß. Ebenso verhält es sich an dieser Seite: Hier zwei Fuß, dort ein Fuß. Und so ergibt sich denn dies von dir gemeinte Viereck.

Sklave: Richtig.

Sokrates: Wenn es nun auf dieser Seite drei Fuß lang ist und auf jener auch, dann muss doch die gesamte Fläche drei Mal drei Fuß groß sein, nicht wahr?

Sklave: Offenbar.



Sokrates: Drei mal drei macht aber wie viel Fuß?

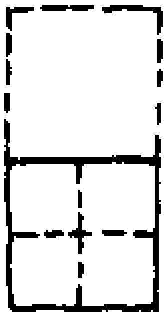
Sklave: Neun.

Sokrates: Das Doppelte aber muss wie viel Fuß sein?

Sklave: Acht.

Sokrates: Also auch die dreifüßige Seite ergibt noch nicht das achtfüßige Quadrat.

Sklave: Offensichtlich noch nicht.



Sokrates: Aber wie groß muss diese Seite denn sein? Versuch es uns genau anzugeben. Wenn du es nicht ausrechnen willst, dann zeig uns in der Figur die entsprechende Länge!

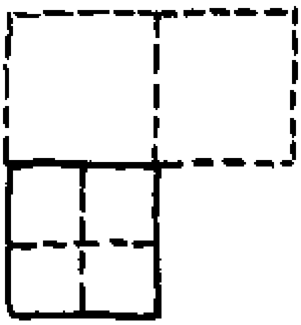
Sklave: Ich weiß es nicht.

Sokrates: Sage du mir, mein Junge: Ist dies nicht das vierfüßige Quadrat? Du verstehst doch?

Sklave: Ja.

Sokrates: Wir können ihm doch hier ein zweites gleich großes Quadrat anfügen?

Sklave: Ja.

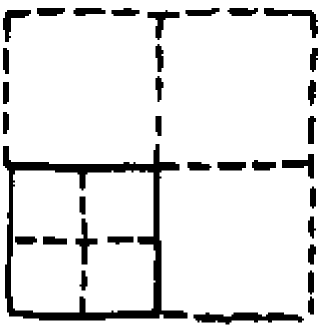


Sokrates: Und an die beiden noch auf folgende Weise ein drittes von gleicher Größe anfügen?

Sklave: Ja.

Sokrates: Und schließlich können wir in die so entstandene „Ecke“ dieses weitere Quadrat einsetzen?

Sklave: Natürlich.



Sokrates: Damit hätten wir vier gleich große Quadrate.

Sklave: Ja.

Sokrates: Wie viel Mal so groß ist die ganze Figur im Vergleich zu dem Quadrat, von dem wir ausgegangen sind?

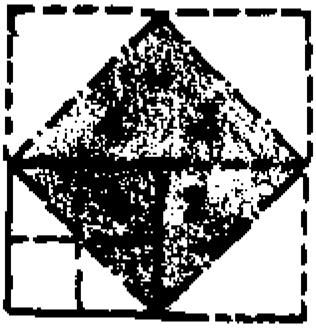
Sklave: Viermal so groß.

Sokrates: Schön; aber es sollte nur doppelt so groß sein. Daran erinnerst du dich doch, nicht wahr?

Sklave: Ja, gewiss.

Sokrates: Sieh hier: Teilt nicht eine Linie, von einer Ecke zur gegenüberliegenden gezogen, jedes der Quadrate in je zwei gleiche Teile?

Sklave: Ja.



Sokrates: Auf diese Weise entstehen doch vier gleiche Linien, die nun dieses Quadrat hier bilden?

Sklave: So ist es.

Sokrates: Überlege also: Wie groß ist dieses Quadrat?

Sklave: Ich komme nicht darauf.

Sokrates: Sind nicht dies vier Quadrate und hat nicht jede Linie von jedem Quadrat die Hälfte ihnen abgeschnitten?

Sklave: Ja.

Sokrates: Wie viele solcher Hälften (Dreiecke) sind nun in diesem Quadrat enthalten?

Sklave: Vier.

Sokrates: Wie viele aber in diesem da?

Sklave: Zwei.

Sokrates: Die vier stehen also in welchem Verhältnis zu den zweien?

Sklave: Sie sind davon das Doppelte.

Sokrates: Wie viel Fuß groß ist nun dieses Quadrat da?

Sklave: Acht.

Sokrates: Mit welcher Quadratseite?

Sklave: Mit dieser hier.

Sokrates: Mit derjenigen, die von einem Winkel des vierfüßigen Quadrates zum gegenüberliegenden gezogen ist?

Sklave: Ja.

Sokrates: Die Gelehrten nennen diese Linie „Diagonale“. Du, Sklave des Menon, behauptest also, dass die Diagonale die Seite des doppelt so großen Quadrates bilde?

Sklave: Ohne Zweifel, Sokrates.

****