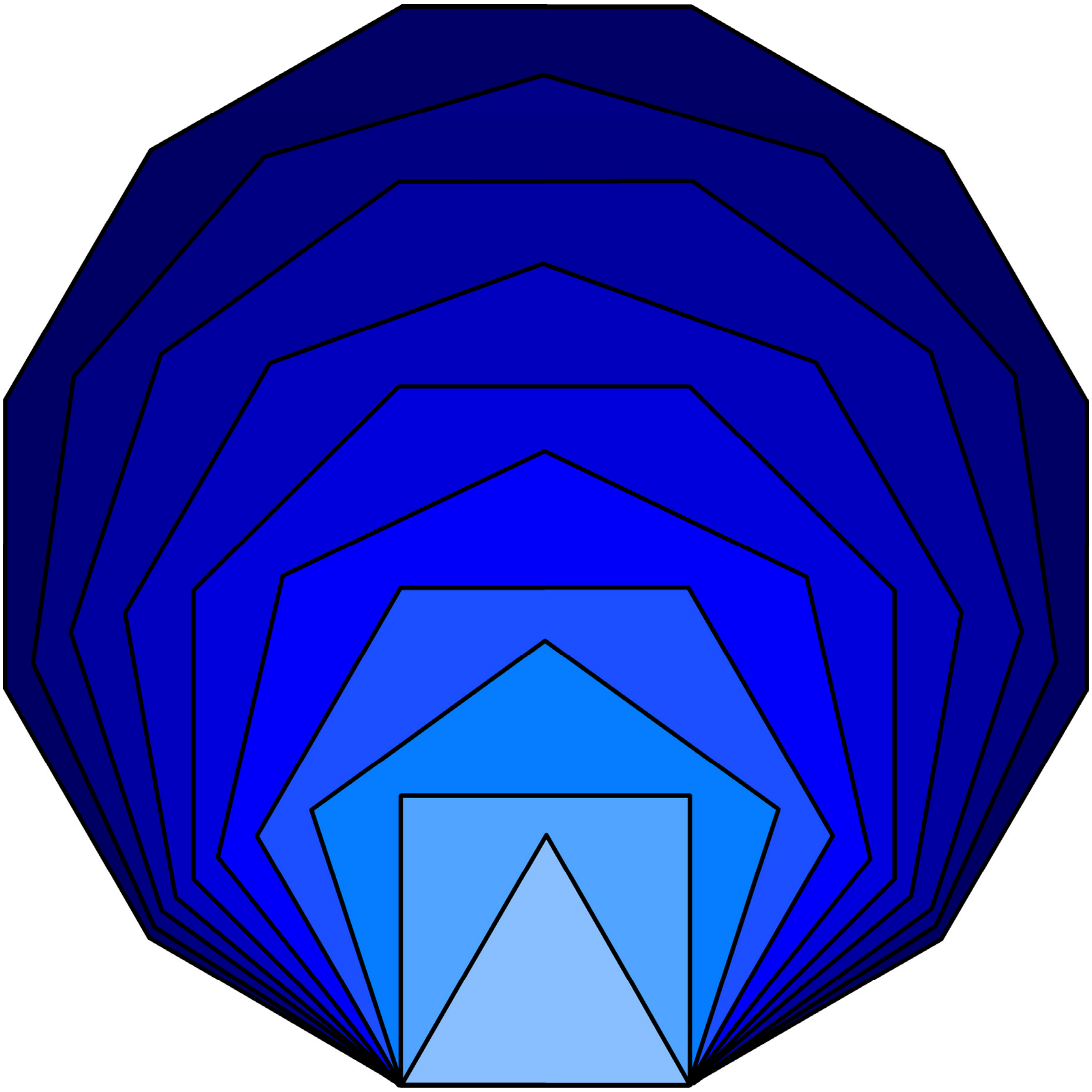


Geometrie der Polygone

– Klassische Konstruktionen –

Markus Wurster

Geometrie der Polygone

Teil 6

Klassische Konstruktionen

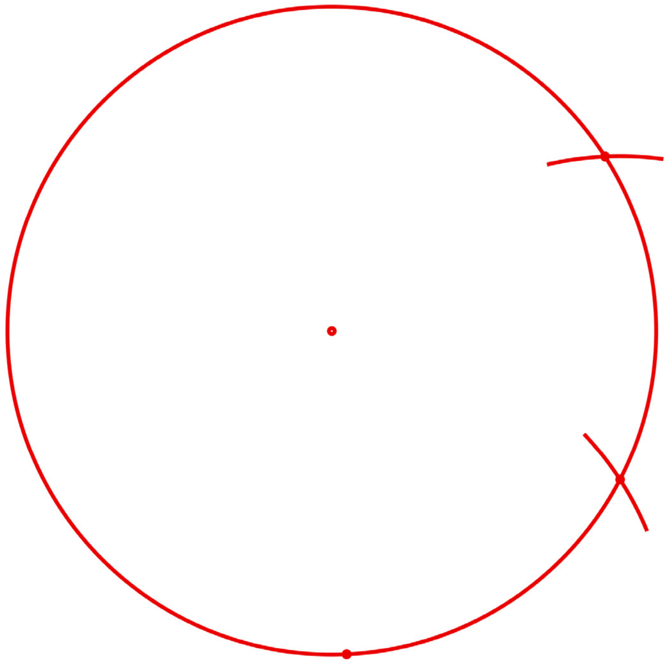
INHALT

Teil 6: Klassische Konstruktionen

Sechseck

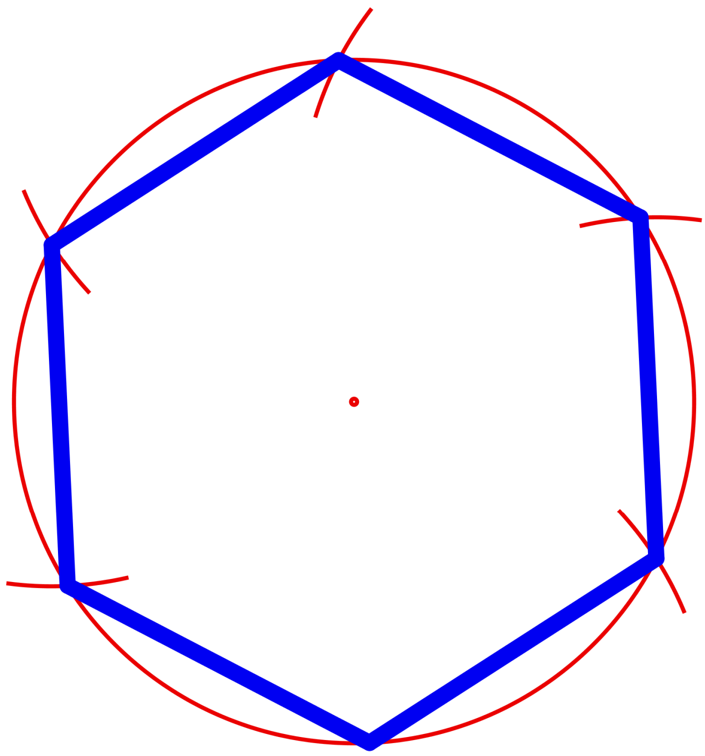
Gegeben ist der Umkreis des Sechsecks

- Zeichne einen Kreis mit dem gewünschten Radius für den Umkreis des Sechsecks.



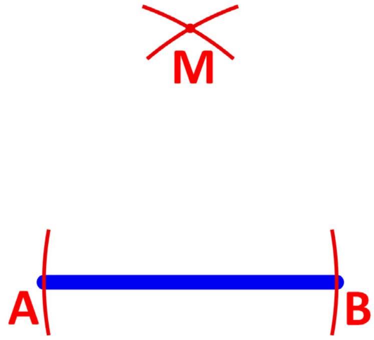
- Trage den Radius sechs Mal auf dem Umkreis ab.
  Mit dem letzten Radius kommt man wieder genau am Ausgangspunkt an!

- Verbinde die sechs Schnittpunkte auf der Kreislinie.



Gegeben ist eine Seite des Sechsecks

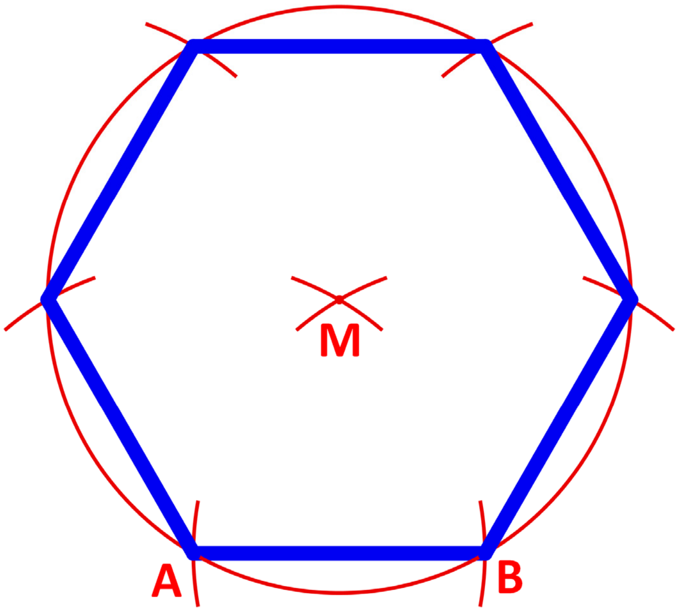
- Zeichne die gewünschte Strecke $\overline{AB}$ für das Sechseck.



- Konstruiere dazu den Punkt M wie bei einem gleichseitigen Dreieck. (Siehe die Konstruktion zum Dreieck auf Seite 5.)

- Ziehe einen Kreis um M durch die Punkte A und B.

- Trage diesen Radius noch vier Mal auf der Kreislinie ab und verbinde die Schnittpunkte.

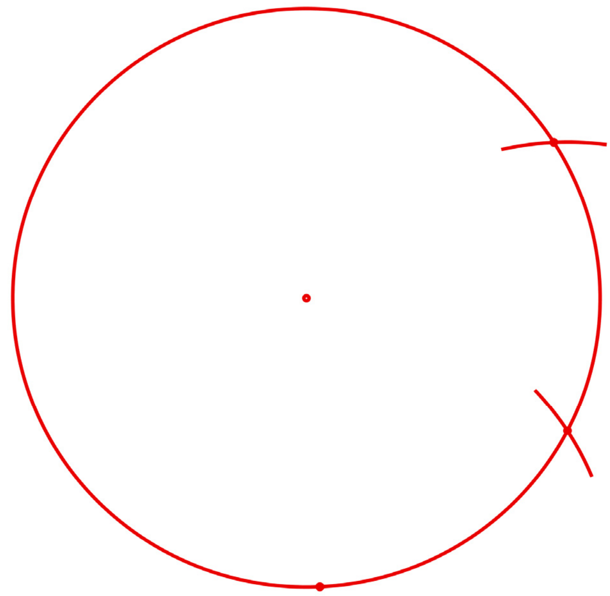


Dreieck

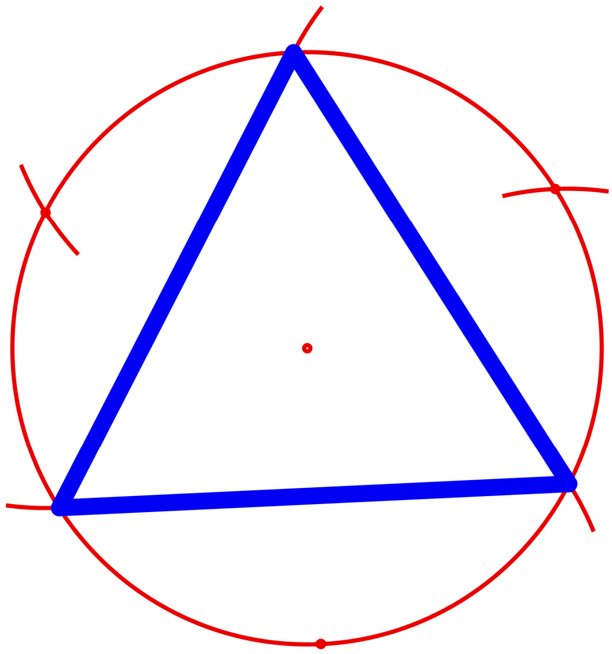
Gegeben ist der Umkreis des Dreiecks

- Zeichne einen Kreis mit dem gewünschten Radius für den Umkreis des Dreiecks.

- Trage den Radius sechs Mal auf dem Umkreis ab.



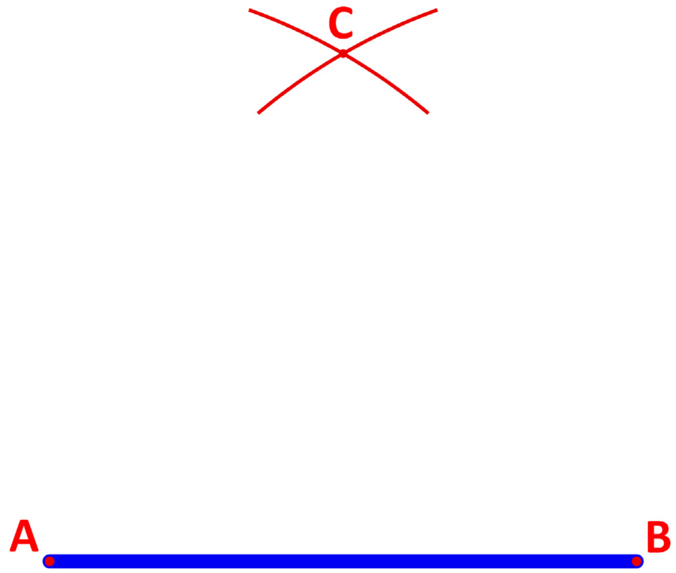
- Verbinde jeden zweiten Punkt.



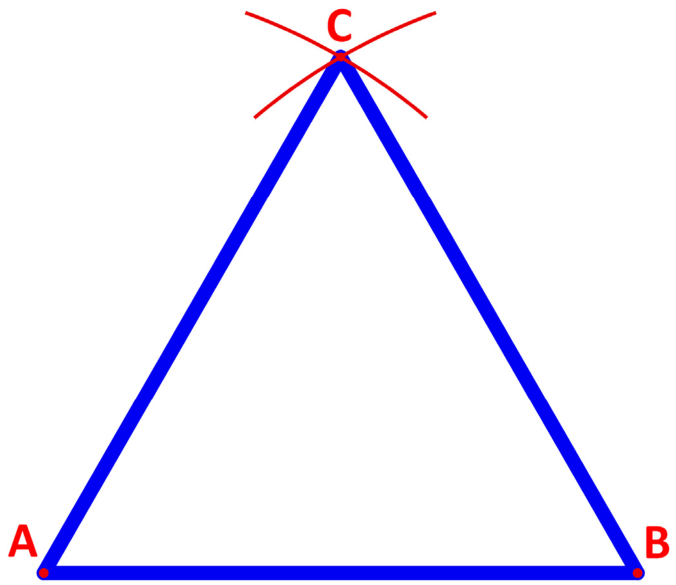
Gegeben ist eine Seite des Dreiecks

- Zeichne die gewünschte Strecke $\overline{AB}$ für das Dreieck.

- Nimm mit dem Zirkel die Länge AB ab und ziehe mit diesem Radius jeweils einen Kreisbogen um A und B.
  Der Schnittpunkt ist C.



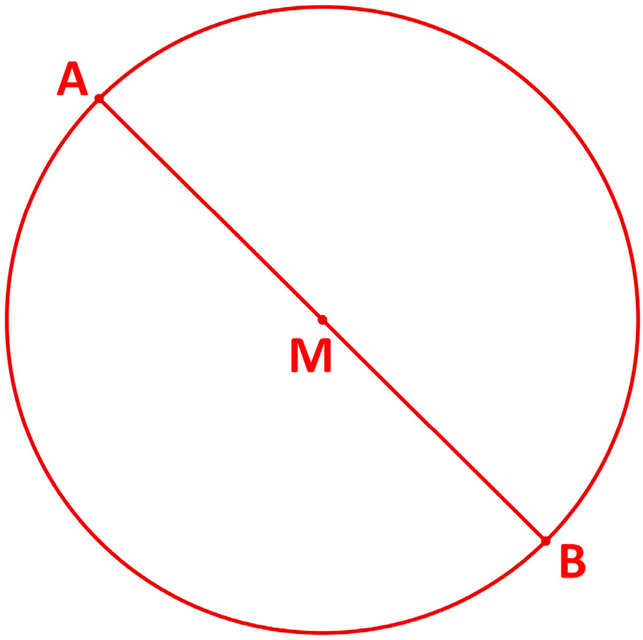
- Verbinde die Punkte A, B und C zum Dreieck.



Viereck

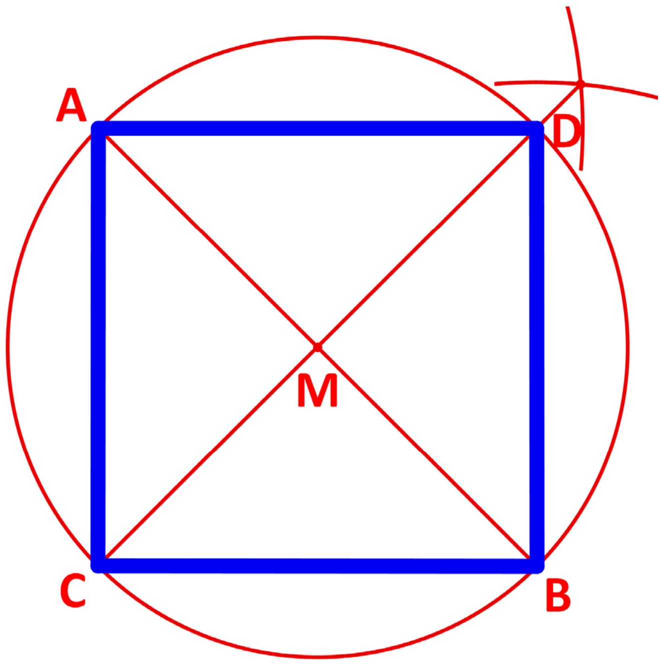
Gegeben ist der Umkreis des Vierecks

- Zeichne einen Kreis mit dem gewünschten Radius für den Umkreis des Quadrats.



- Zeichne eine Linie durch den Mittelpunkt.
  Diese Linie bildet eine Diagonale des Quadrats.

- Konstruiere die Mittelsenkrechte zur Linie $\overline{AB}$. (Je einen Kreis um A und B mit dem gleichen Radius.)



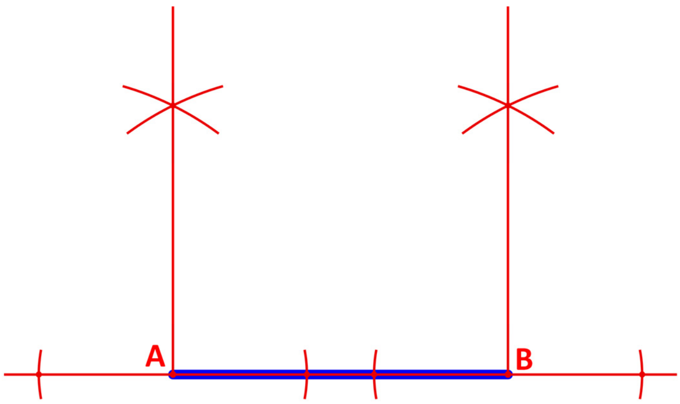
- Verbinde die vier Schnittpunkte A, D, B, C auf der Kreislinie zum Quadrat.

Gegeben ist eine Seite des Vierecks – Möglichkeit 1

- Zeichne die gewünschte Strecke $\overline{AB}$ für das Quadrat.

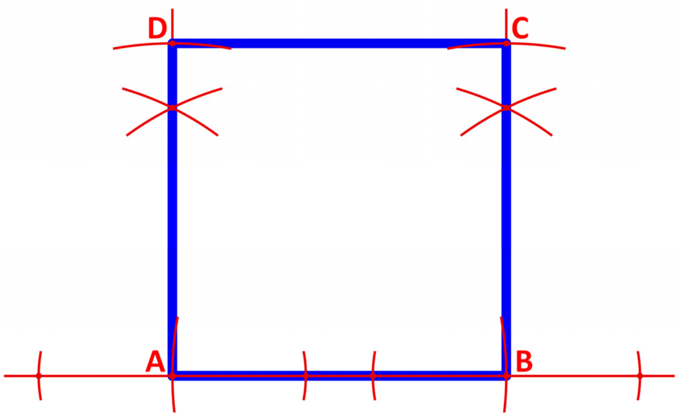
- Verlängere die Strecke nach beiden Seiten.

- Errichte an Punkt A und B eine Senkrechte.



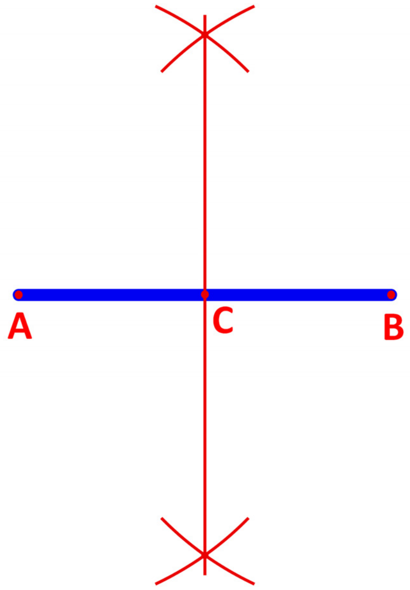
- Ziehe um A und B einen Kreis mit Radius $\overline{AB}$. Die Schnittpunkte auf den Senkrechten ergeben die Punkte D und C.

- Verbinde alle Punkte zum Quadrat.

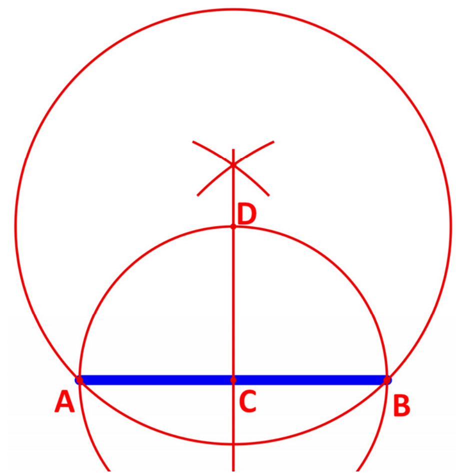


Gegeben ist eine Seite des Vierecks – Möglichkeit 2

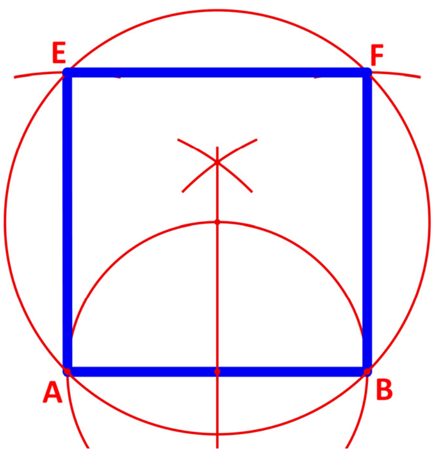
- Zeichne die gewünschte Strecke $\overline{AB}$ für das Quadrat.
- Konstruiere die Mittelsenkrechte.
  Dazu ziehst du um A und B einen Kreis mit gleichem Radius.



- Ziehe um C einen Thaleskreis über $\overline{AB}$. (Die Punkte A,B,D bilden ein rechtwinkliges Dreieck.) D ist der Mittelpunkt des Umkreises.
- Ziehe um D einen Kreis durch A und B. Das ist der Umkreis für das Quadrat.

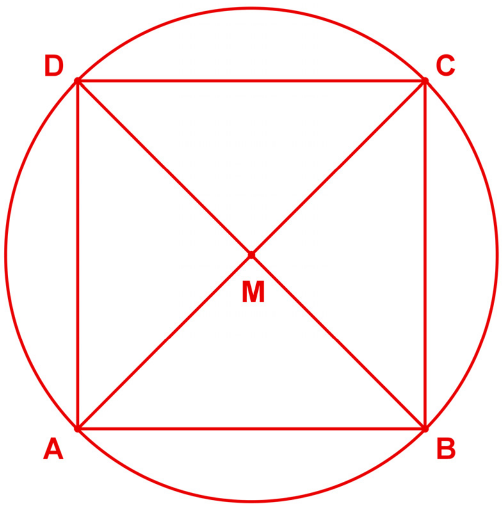


- Ziehe einen Kreis um A mit Radius $\overline{AB}$. Du erhältst den Punkt E.
- Ebenso einen Kreis um B mit Radius $\overline{AB}$. Du erhältst den Punkt F.
- Verbinde die Punkte A, E, F, B zum Quadrat.

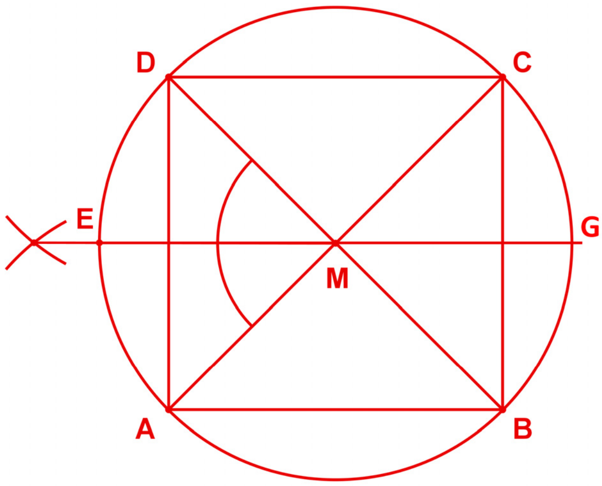


Achteck

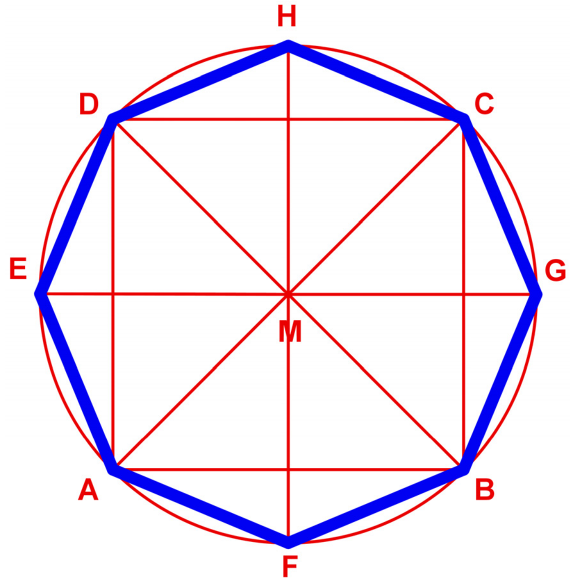
- Das Achteck konstruiert man aus einem Quadrat, indem man die Zentriwinkel halbiert (Winkelhalbierende).



- Zur Teilung des Zentriwinkels kann man die Punkte A und D verwenden. Ziehe um diese Punkte einen Kreis mit gleichem Radius. Verbinde den Schnittpunkt mit M und ziehe die Linie bis zur anderen Seite des Kreises. Die neuen Punkt auf der Umkreislinie sind E und G.



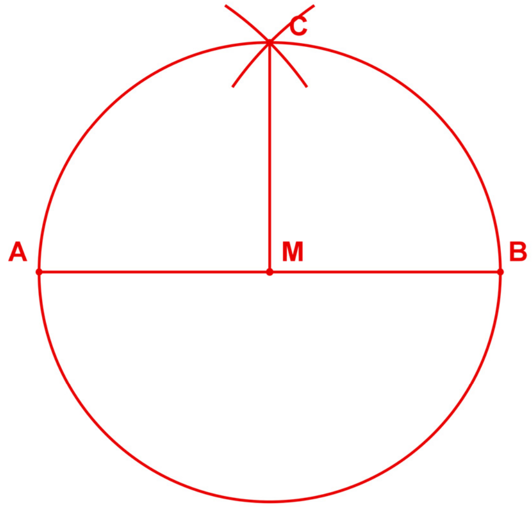
- Konstruiere auf dieselbe Weise die Punkte F und H und verbinde alle Punkte auf der Kreislinie zu einem Achteck.



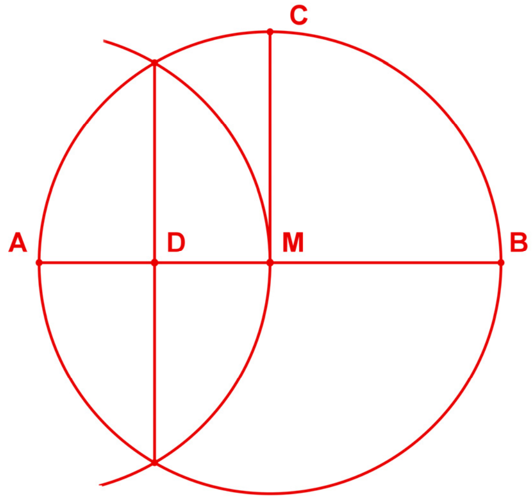
Fünfeck

Gegeben ist der Umkreis des Fünfecks – Möglichkeit 1

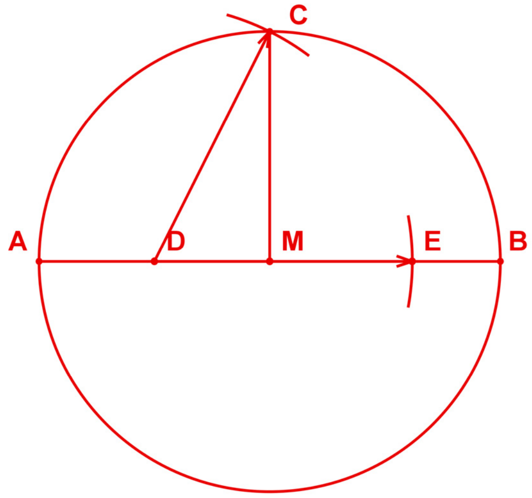
- Zeichne einen Kreis mit dem gewünschten Radius für den Umkreis des Fünfecks.
- Zeichne einen Durchmesser $\overline{AB}$ (waagrecht).
- Zeichne einen Radius $\overline{MC}$ senkrecht dazu.



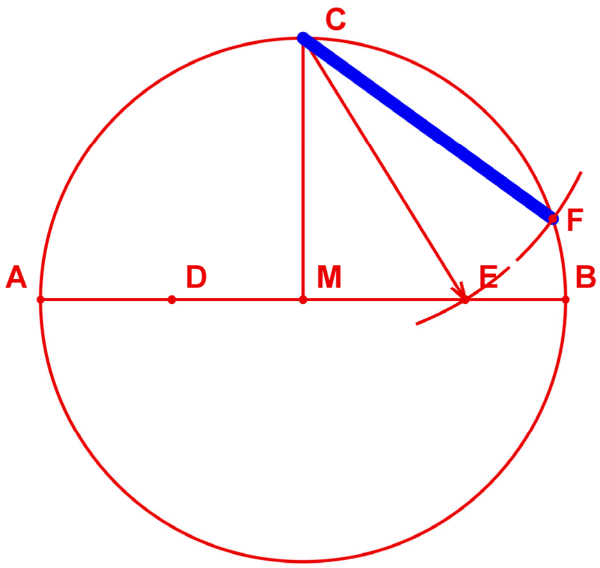
- Halbiere $\overline{AM}$, um den Punkt D zu erhalten. Ziehe dazu einen Kreis um A mit Radius $\overline{AM}$. Verbinde die Schnittpunkte auf der Umkreislinie.



- Setze den Zirkel in D ein. Stelle den Radius auf $\overline{DC}$ ein. Ziehe den Kreisbogen über die waagrechte Diagonale. Der Schnittpunkt ist E.

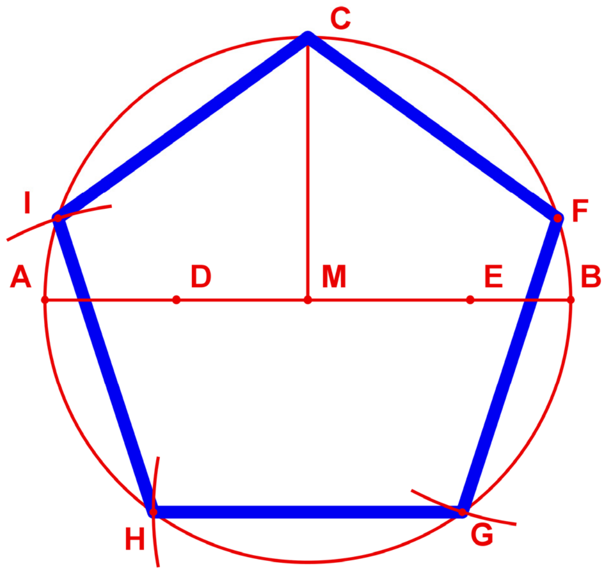


- Setze den Zirkel in C ein. Stelle den Radius auf $\overline{CE}$ ein. Ziehe den Kreisbogen über die Umkreislinie. Der Schnittpunkt ist F.



- $\overline{CE}$ bildet eine Seite des Fünfecks.

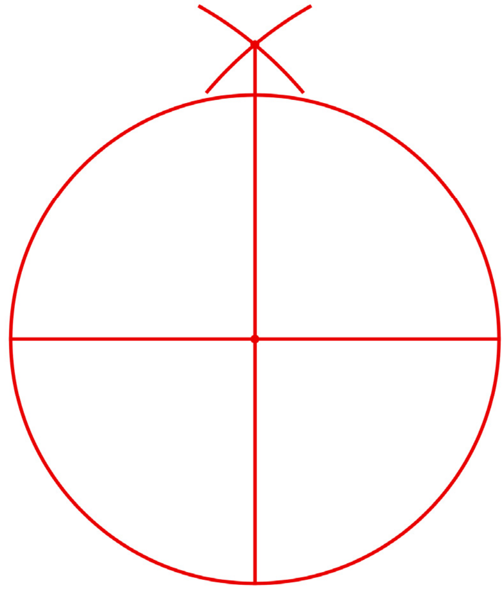
- Trage diese Länge $\overline{CE}$ noch drei Mal auf der Kreislinie ab und verbinde die Punkte F, G, H, I, C zu einem Fünfeck.



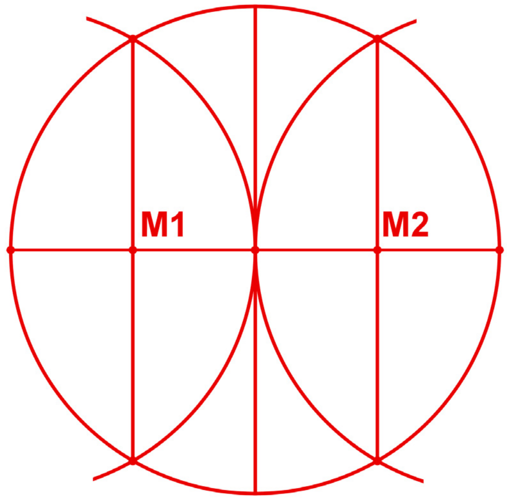
Gegeben ist der Umkreis des Fünfecks – Möglichkeit 2

- Zeichne einen Kreis mit dem gewünschten Radius für den Umkreis des Fünfecks.

- Zeichne einen waagrechten Durchmesser und konstruiere dazu den senkrechten Durchmesser.

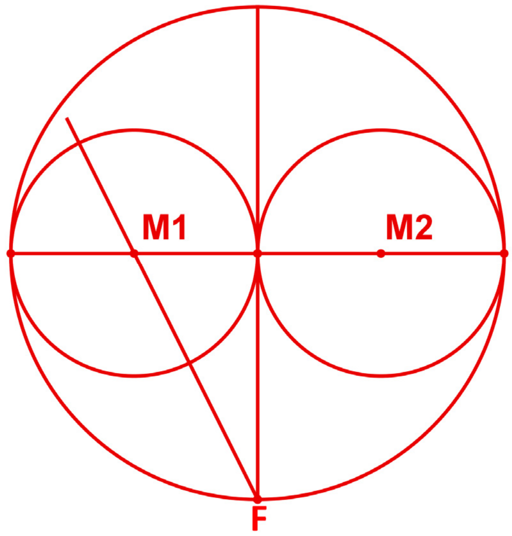


- Konstruiere die beiden Mittelpunkte der Radien.



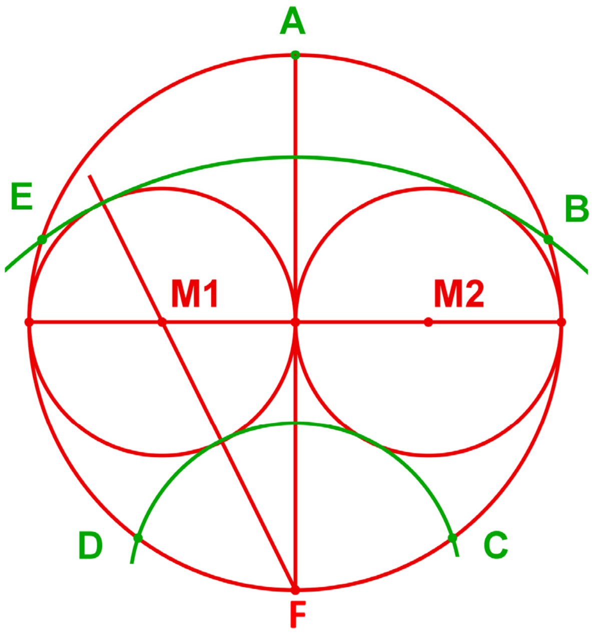
- Ziehe zwei Kreise um M1 und M2, die genau in den großen Außenkreis passen.

- Ziehe eine Sekante vom Fußpunkt F durch den Mittelpunkt M1.

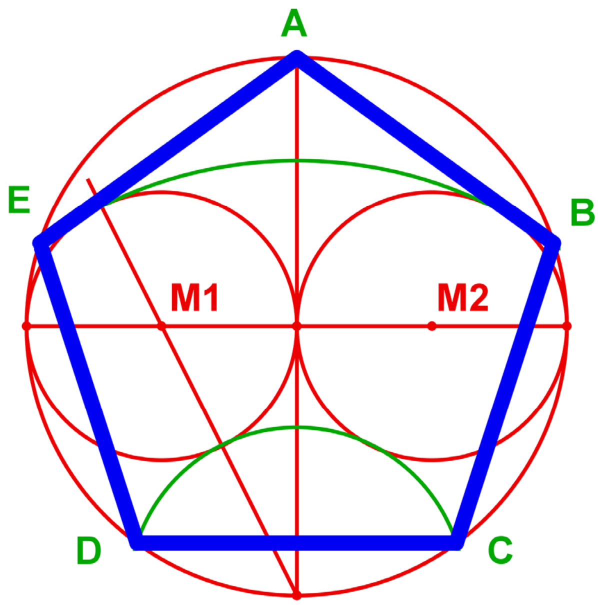


- Lege an die Schnittpunkte dieser Linie mit dem kleinen Kreis zwei Kreisbögen aus dem Zentrum F.

- Diese schneiden die Umkreislinie in den Punkten E, B, D und C.



- Verbinde alle 5 Punkte auf der Umkreislinie zu einem Fünfeck.

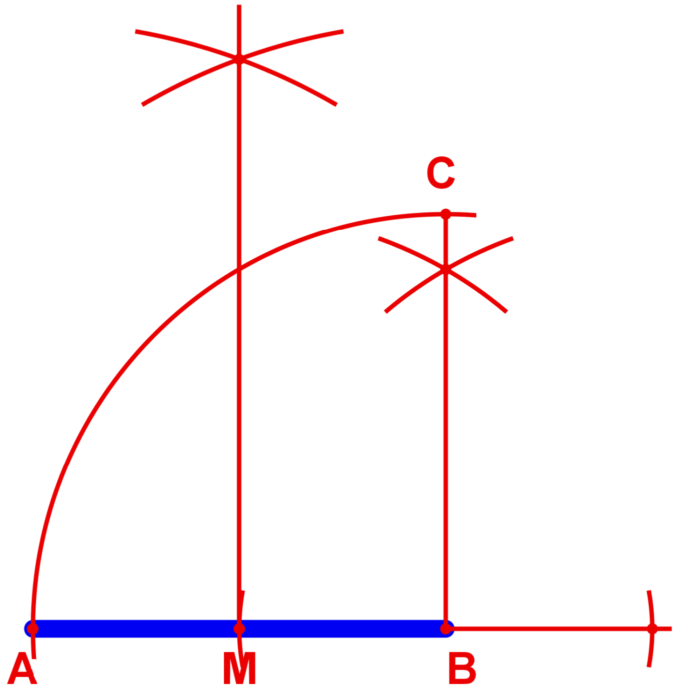


(Falls du dich fragst, warum man den zweiten kleinen Kreis um M2 brauchte: Man braucht ihn eigentlich gar nicht, aber man findet ihn in allen Konstruktionsanleitungen, weil die Symmetrie so reizvoll aussieht.)

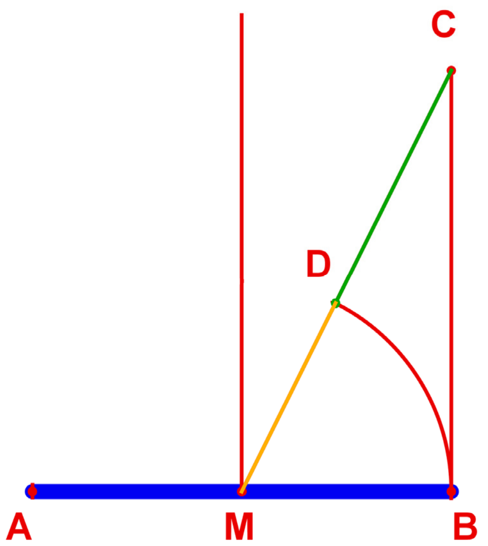
Gegeben ist eine Seite des Fünfecks

Diese Konstruktion ist schon ziemlich schwierig. Vielleicht kannst du sie trotzdem Schritt für Schritt nachzeichnen:

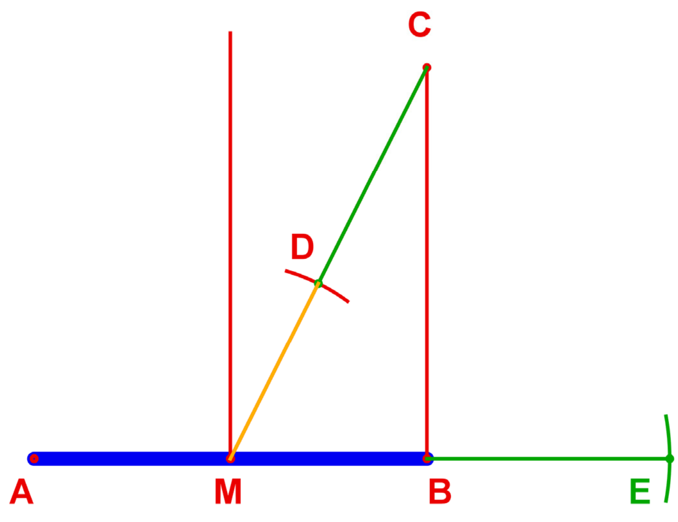
- Zeichne die gewünschte Strecke $\overline{AB}$ für das Fünfeck.
- Errichte über dieser Seite eine Mittelsenkrechte.
- Konstruiere die Senkrechte $\overline{BC}$ mit Länge $\overline{AB}$.



- Verbinde M und C.
- Diese Linie wird nun nach dem Goldenen Schnitt unterteilt: Ziehe einen Kreis um M mit Radius $\overline{MB}$.



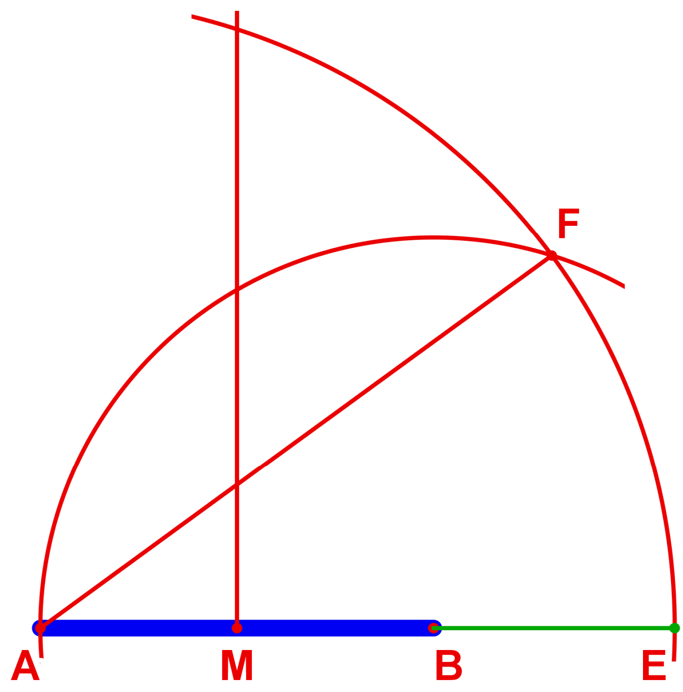
- Trage die Strecke $\overline{CD}$ mit dem Zirkel ab und setze diese Strecke an $\overline{AB}$ an. So entsteht Punkt E.



- Ziehe einen Bogen um A mit Radius $\overline{AE}$.

- Ziehe einen Bogen um B mit Radius $\overline{AB}$.

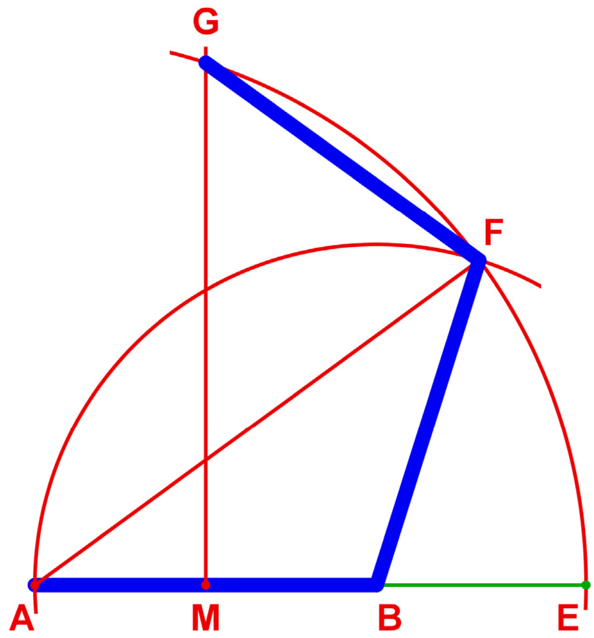
- Der Schnittpunkt der Bögen ist F.
  $\overline{AF}$ ist eine Diagonale des Fünfecks.



- $\overline{\text{BF}}$ bildet die zweite Seite des Fünfecks.

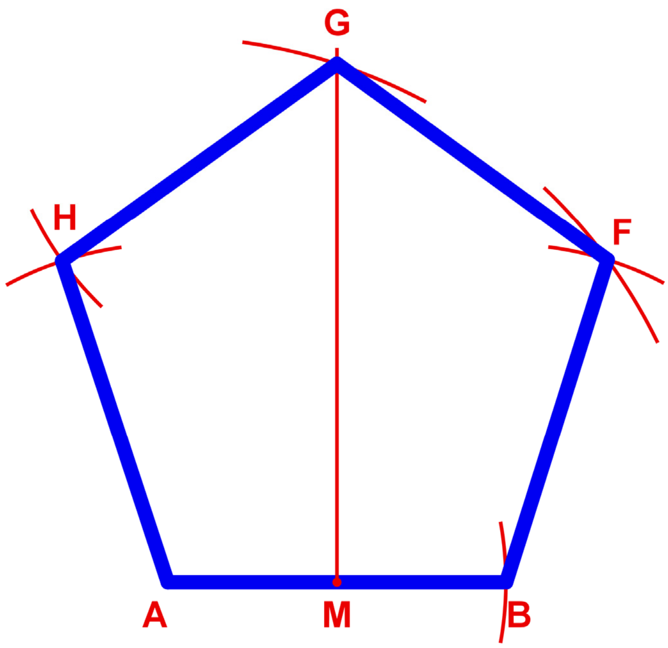
- Der Schnittpunkt des großen Bogens mit der Mittelsenkrechten über M bildet den Punkt G.

- $\overline{\text{FG}}$ ist die dritte Seite des Fünfecks.



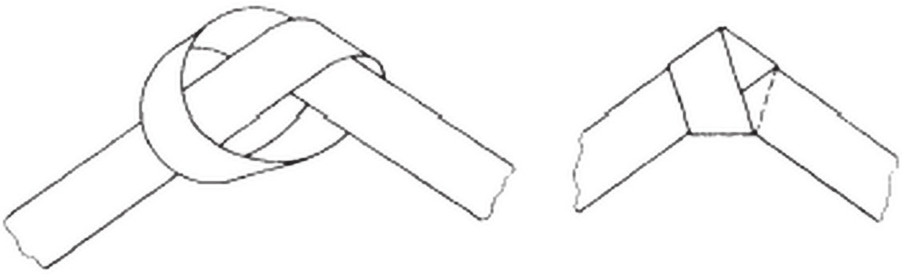
- Trage die Länge $\overline{\text{AB}}$ mit dem Zirkel ab und ziehe einen Bogen um A und um G.

- Der Schnittpunkt ist H. Nun hast du alle Punkte und Seiten des Fünfecks.



Knoten-Konstruktion

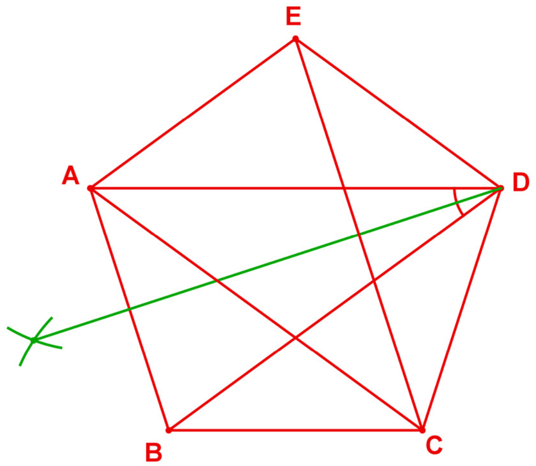
Eine Konstruktion sogar ganz ohne Zirkel und Lineal:
Bindet man mit einem Papierstreifen einen Knoten ("Überhandknoten") und zieht vorsichtig an den Papierenden, so entsteht erstaunlicherweise ein Fünfeck.



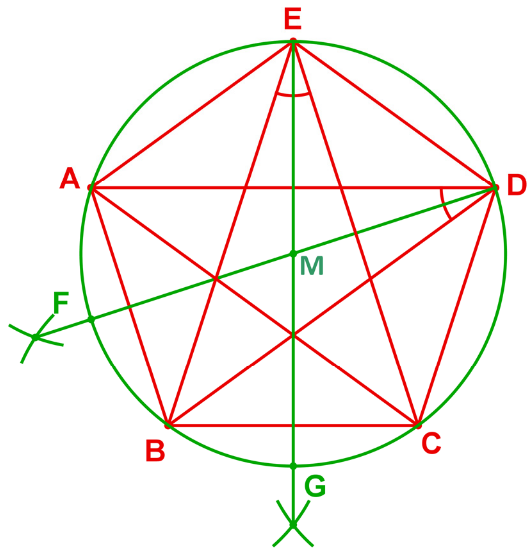
Hier blauen Papierknoten einkleben
Streifen 30x4 cm

Zehneck

- Das Zehneck konstruiert man aus einem Fünfeck, indem man die Winkel zweier benachbarter Diagonalen halbiert (Winkelhalbierende).

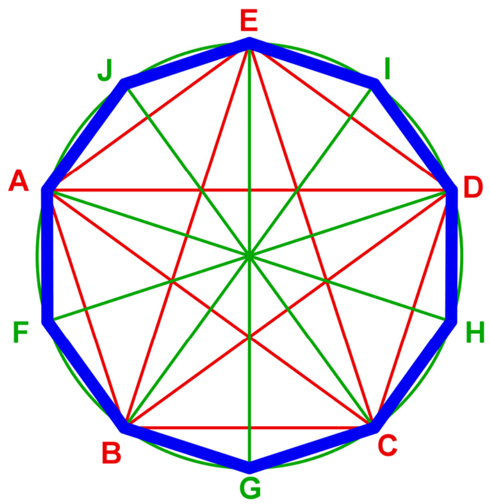


- Zur Teilung des Winkels kann man die Punkte A und B verwenden.
  Ziehe um diese Punkte einen Bogen mit gleichem Radius. Verbinde den Schnittpunkt mit D.



- Halbiere den nächsten Winkel. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist der Mittelpunkt M des Umkreises.

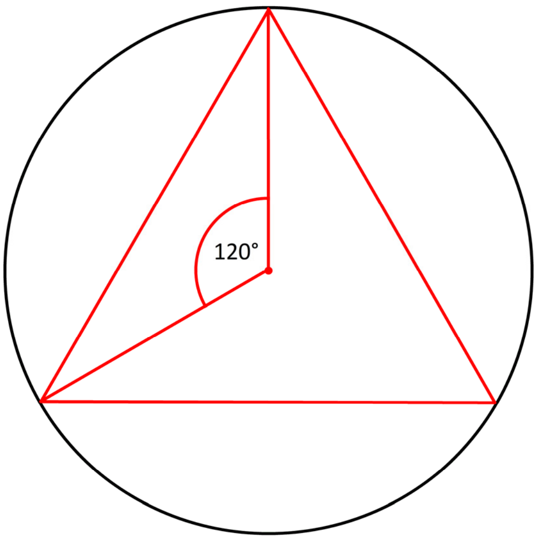
- Die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit der Kreislinie ergeben die zusätzlichen Punkte F, G, H, I und J für das Zehneck.

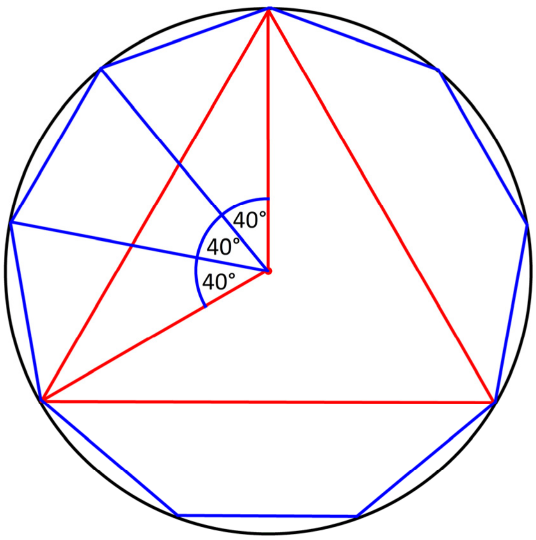


Näherungskonstruktionen

Das Dreieck, das Viereck, das Fünfeck, das Sechseck, das Achteck und das Zehneck konnten die antiken Mathematiker mit ihrer strengen Methode „Zirkel und Lineal“ exakt konstruieren.

Beim Siebeneck und beim Neuneck gelang es ihnen mit dieser Methode nicht. Das ist überraschend, denn man kann sich doch leicht vorstellen, wie man zum Beispiel ein Neuneck erhalten könnte: Ein Dreieck ist ganz einfach zu konstruieren. Teilte man nun den Winkel des Dreiecks in drei gleiche Teile, hätte man auch schon ein Neuneck.





Aber genau diese Dreiteilung des Winkels mit Zirkel und Lineal wurde zu einem unlösbaren Problem. Man kann einen Winkel halbieren, aber offenbar nicht dritteln.

Es wurden im Laufe der Zeit immer wieder neue Vorschläge gemacht, wie man ein Siebeneck und Neuneck in möglichst genauer Annäherung konstruieren kann, aber ganz exakt gelang es nie.

Erst 2000 Jahre später verstand Carl Friedrich Gauß (1777-1855), warum das so ist. Er konnte beweisen, dass es grundsätzlich unmöglich ist, diese Formen nur mit Zirkel und Lineal exakt zu konstruieren.

Gauß wurde durch dessen Abbildung auf dem früheren Zehnmarkschein geehrt.

Aber gerade deshalb war es für viele Mathematiker immer wieder eine besondere Herausforderung, eine möglichst genaue und raffinierte Methode für eine Näherungskonstruktion zu finden.

Besonders erfindungsreich war dabei der Künstler und Mathematiker Albrecht Dürer (1471-1528).

Selbstbildnis von Albrecht Dürer (1498)

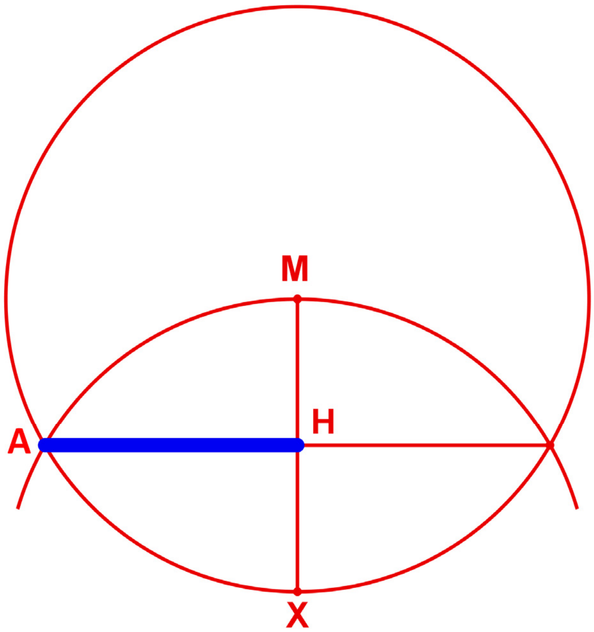
Melencolia (1514) – Findest du den Zirkel und das Richtscheidt?

Viel Spaß beim Ausprobieren dieser faszinierenden Vorschläge!

Siebeneck

Gegeben ist der Umkreis des Siebenecks – Möglichkeit 1

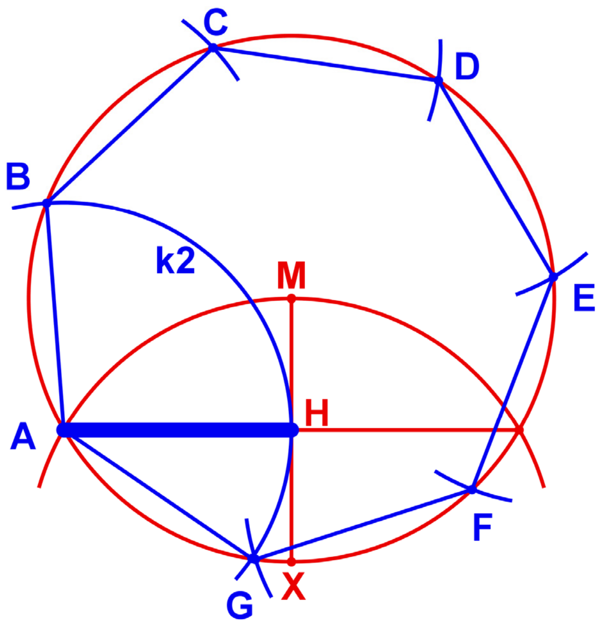
- Zeichne einen Kreis mit dem gewünschten Radius für den Umkreis des Siebenecks.



- Zeichne eine senkrechte Linie $\overline{MX}$ vom Mittelpunkt bis zur Kreislinie.

- Zeichne einen Bogen um X mit dem Radius $\overline{MX}$.

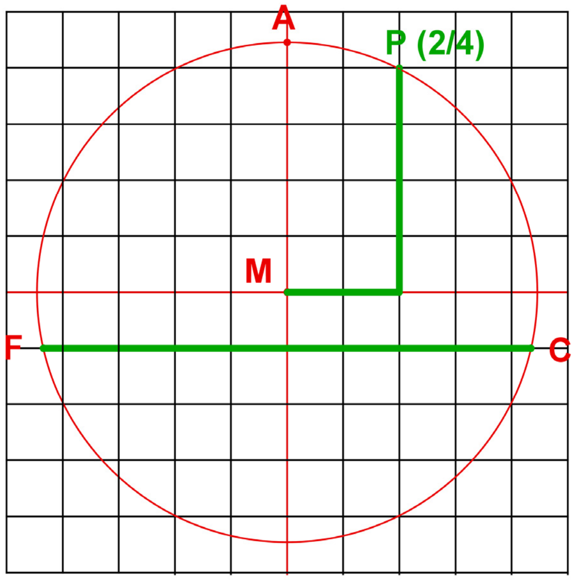
- Verbinde die Schnittpunkte der beiden Kreisbögen. Die Strecke $\overline{AH}$ ist eine gute Näherung für die Seitenlänge des Siebenecks.



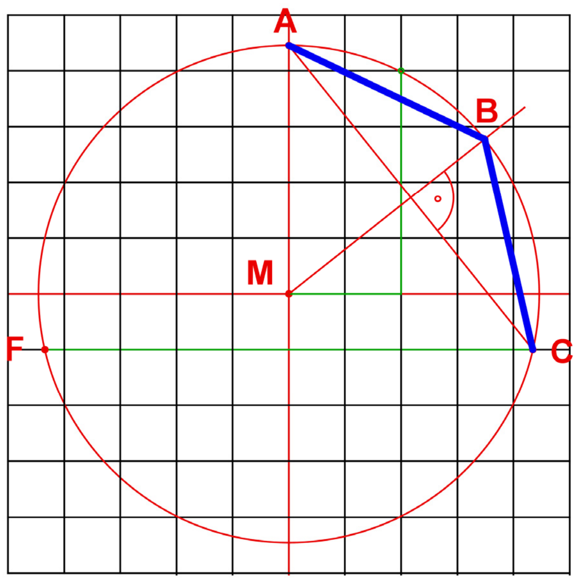
- Die Eckpunkte B bis G erhält man durch Abschlagen der Strecke $\overline{AH}$ auf der Umkreislinie. Der Fehler ist sehr gering.

Siebeneck

Gegeben ist der Umkreis des Siebenecks – Möglichkeit 2

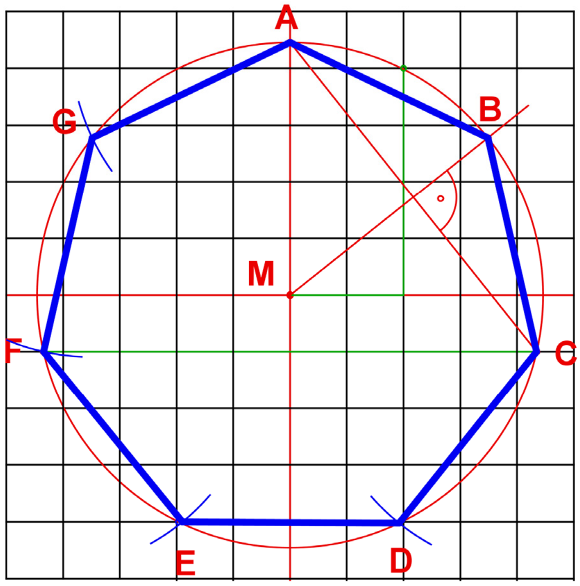


- Für diese Konstruktion brauchst du ein Koordinaten-Gitter (Karoblatt).
- Lege einen Mittelpunkt fest.
- Zeichne den Umkreis so, dass er durch den Punkt 2/4 verläuft.
- Der Schnittpunkt des senkrechten Durchmessers mit der Kreislinie ist Punkt A des Siebenecks.
- Zeichne eine waagrechte Linie, die um eine Einheit unter dem waagrechten Durchmesser verläuft. Die Schnittpunkte mit der Kreislinie sind die Punkte C und F des Siebenecks.



- Ziehe eine Linie $\overline{AB}$.
- Konstruiere dazu eine Senkrechte durch den Mittelpunkt M.
- Der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit der Kreislinie ist der Punkt B des Siebenecks.

- Jetzt haben wir die Seitenlänge $\overline{AB}$ des Siebenecks und können diese Länge mit dem Zirkel auf der Kreislinie für die restlichen Punkte D, E, F und G abschlagen.

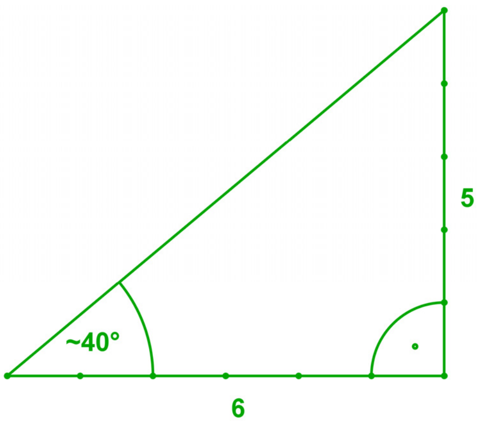


Karoblatt für Siebeneck-Konstruktion (Kopiervorlage)

Neuneck

Konstruktion mit Hilfe eines angenäherten Winkels

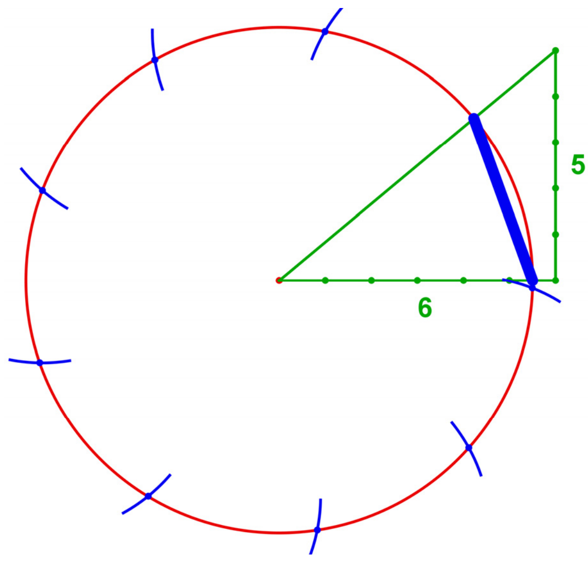
Bei der folgenden Methode haben die Mathematiker überlegt, wie man auf einfache Weise einen Winkel konstruieren kann, der möglichst genau 360° : 9 = 40° groß ist.



Dies ist bei einem rechtwinkligen Dreieck der Fall, bei dem die kurzen Seiten 6 und 5 Einheiten lang sind.

(Das geht auch ohne Mess-Lineal. Man kann die Einheiten mit dem Zirkel aneinanderhängen.)

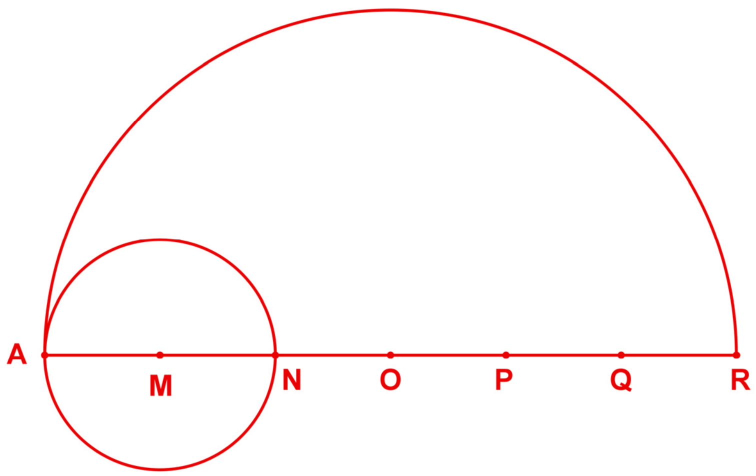
Damit kann man nun ein angenähertes Neuneck konstruieren:



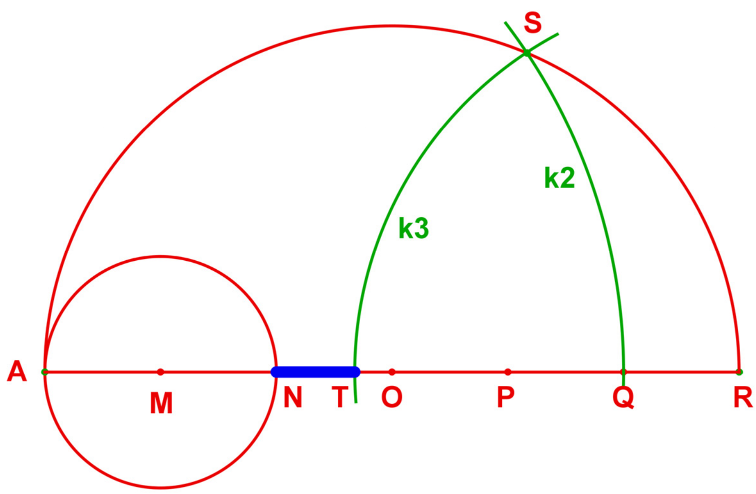
- Zeichne in das Karoblatt (Kopiervorlage nächste Seite) ein solches Dreieck.
- Ziehe einen Kreis um den Eckpunkt des Dreiecks, so dass die Kreislinie innerhalb des Dreiecks verläuft.
- Die Schnittpunkte von Kreis und Dreieck ergeben eine Seitenlänge des Siebenecks.
- Wenn du die Seitenlänge wiederholt auf der Kreislinie abträgst, kannst du feststellen, dass sie nur ein ganz klein wenig zu kurz ist. Diese Annäherung ist schon ziemlich gut.

Zweite Konstruktionsmöglichkeit

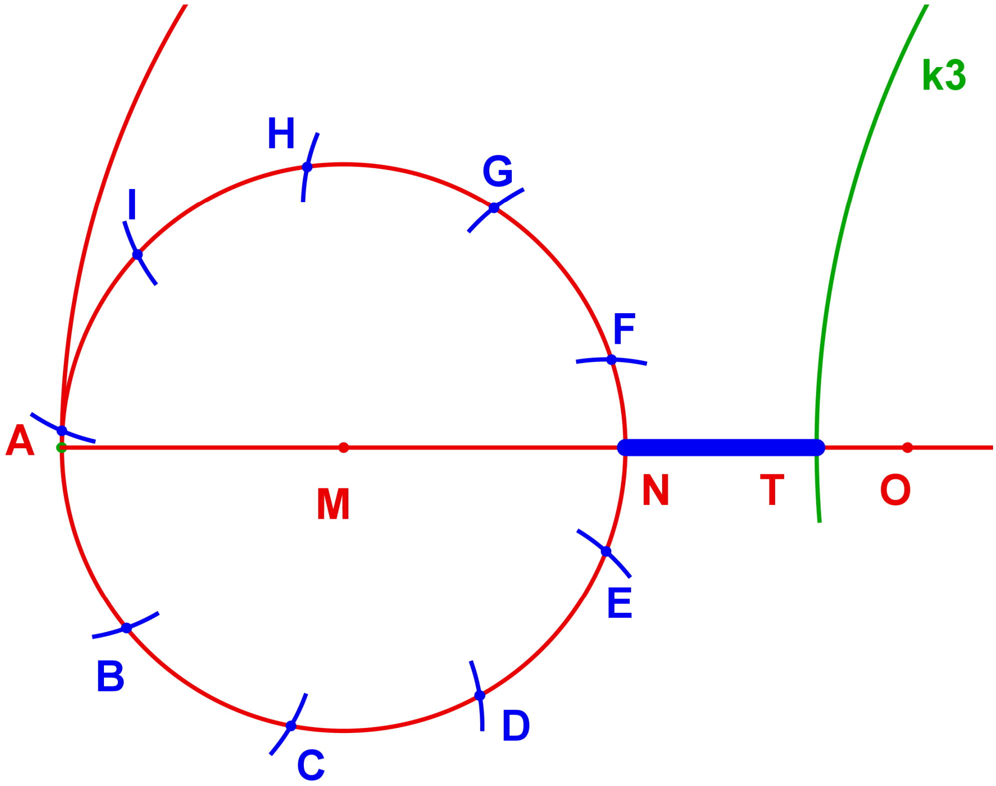
- Zeichne um Punkt M den Umkreis für das Neuneck.
- Zeichne den Durchmesser $\overline{AN}$ und verlängere ihn auf das Dreifache (setze 4 Radien an).
- Punkt O ist die Mitte der Strecke $\overline{AN}$. Zeichne über O einen Thaleskreis (Halbkreis).



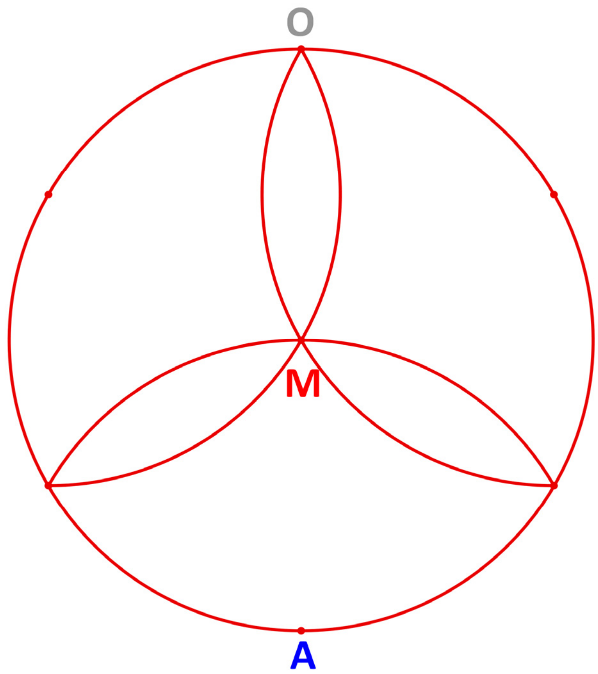
- Stelle den Zirkel auf $\overline{AQ}$ (5 Radien) ein. Zeichne mit diesem Radius einen Bogen (k2) um A.
- Nimm mit dem Zirkel die Strecke $\overline{RS}$ ab. Zeichne mit diesem Radius einen Bogen (k3) um R.
- Der Abschnitt $\overline{NT}$ ist eine gute Näherung für die Seitenlänge des Neunecks.



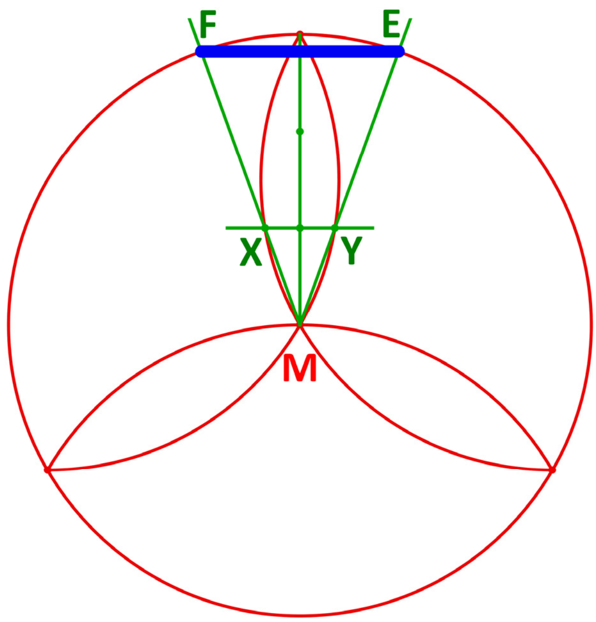
- Trage diese Länge beginnend bei A wiederholt auf dem Umkreis des Neunecks ab. Wieder kannst du feststellen, dass die Seitenlänge ein klein wenig zu kurz ist.



Dritte Konstruktionsmöglichkeit von Albrecht Dürer



- Zeichne einen Kreis mit einem „Fischblasenmuster“, indem du den Radius sechs Mal auf dem Kreisumfang abträgst und um jeden zweiten der so gewonnenen Punkte die Kreisbögen mit demselben Radius schlägst.
- Verbinde die Punkte M und O durch eine Linie.
- Diese Strecke muss nun gedrittelt werden. Wie das mit Zirkel und Lineal möglich ist, wurde im Kapitel 5 gezeigt. Wir verwenden hier ausnahmsweise ein Mess-Lineal.
- Zeichne durch den Punkt, der dem Mittelpunkt am nächsten ist, eine senkrechte Linie. Sie schneidet die Fischblase in X und Y.
- Ziehe eine Gerade durch M und X sowie durch M und Y.
- Diese Geraden schneiden den Umkreis in den Punkten F und E.



- Die Verbindung $\overline{EF}$ bildet eine Näherung für die Seite des Neunecks.
- Nimm diese Strecke mit dem Zirkel ab und trage sie auf dem Umkreis in beiden Richtungen vier Mal ab.
- Wäre die Seitenlänge exakt, würden die beiden letzten Punkte am Fuß der Figur zusammenfallen. Es bleibt aber eine kleine Lücke – das bedeutet, dass die Seitenlänge bei dieser Konstruktion etwas zu klein ist.
  (Allerdings ist der Fehler in dieser Zeichnung übertrieben dargestellt. Du kannst es mit Zirkel und Lineal genauer schaffen.)