

GEOMETRIE DER POLYGONE

– Platonische Körper –

Markus Wurster

Geometrie der Polygone

Teil 7

Platonische Körper

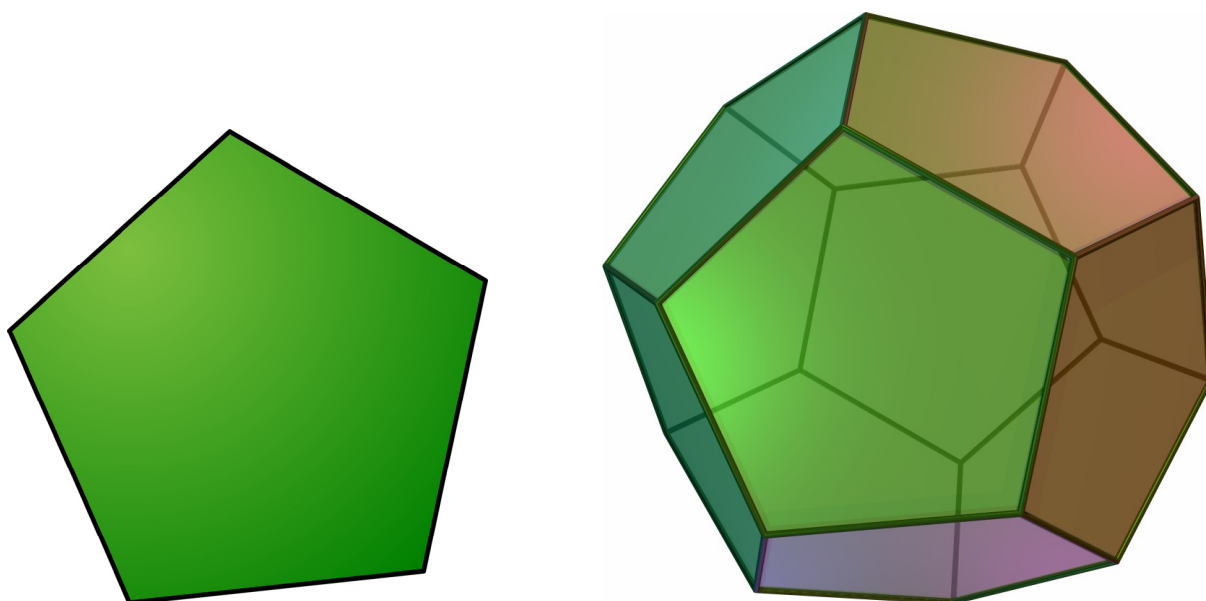
INHALT

Teil 7: Platonische Körper

Vom Polygon zum Polyeder	2
Platon	3
Die Platonischen Körper	5
Das Hexaeder	6
Das Tetraeder	7
Das Oktaeder	8
Das Ikosaeder	9
Das Dodekaeder	10
Bauvorschläge	11
Hexaeder	13
Tetraeder	14
Oktaeder	15
Ikosaeder	16
Dodekaeder	17
Nur fünf Platonische Körper?	18
Poetisches Rätsel	19
Die Platonischen Körper in der Kugel	20
Johannes Kepler	21
Kopiervorlagen Umkugel	24
Platonische Körper zeichnen (Oktaeder)	26

Vom Polygon zum Polyeder – Körper aus Polygonen

Körper, die von geraden (ebenen) Flächen begrenzt sind, nennt man **Polyeder**. Besonders reizvoll sind die Körper, deren Oberfläche aus regelmäßigen Polygonen besteht. Sie heißen **regelmäßige Polyeder**.

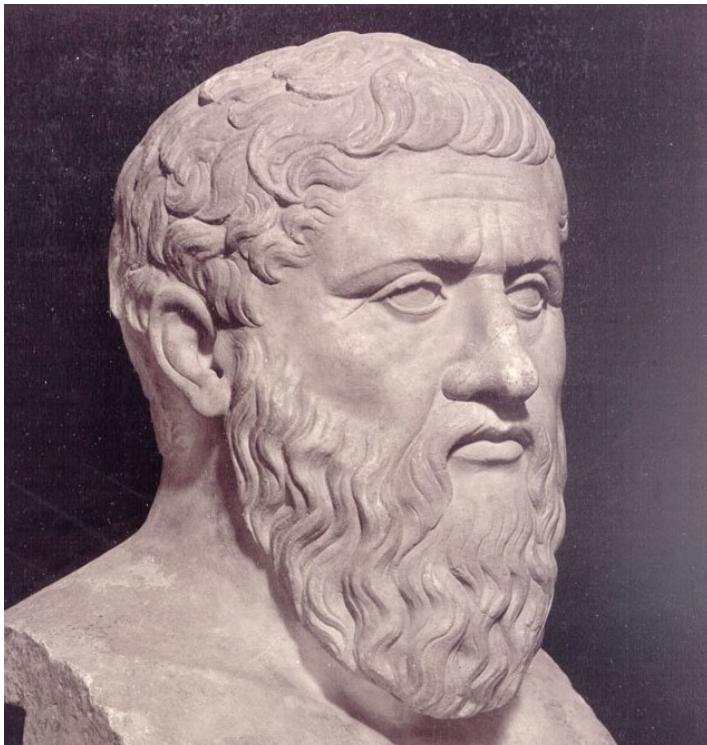


Polyeder, die nur aus einer einzigen Form gebildet werden, weisen die größte Regelmäßigkeit auf. Man kann sie drehen und wenden, wie man will – sie sehen aus jeder Perspektive völlig gleich aus.

Solche **Platonische Körper** können aus Dreiecken, aus Vierecken oder aus Fünfecken zusammengesetzt sein.

Wir kennen fünf Platonische Körper. Bevor wir sie uns genauer betrachten, machen wir einen kleinen Exkurs (Abstecher) zu dem Philosophen Platon, dem Namensgeber dieser Körper.

Platon



Rom, Vatikan, Sala delle Muse
www.aeria.phil.uni-erlangen.de/photo_html/portraet/griechisch/denker/platon/platon.html

Platon lebte vor etwa 400 Jahre vor Christi Geburt im antiken (alten) Griechenland. Er gilt als der bedeutendste Philosoph in unserem Kulturbereich. Mit ihm begann die abendländische Philosophie und bis heute setzen sich alle ernsthaften Denker mit ihm auseinander.

Platon entwickelte die Lehre von den *absoluten Ideen*. Er sagt, es gibt ewige und unverwandelbare Wesenheiten, die Ideen. Diese Ideen sind schon immer da, obwohl wir sie in der Wirklichkeit gar nicht vollkommen finden können.

Ein Beispiel: Es gibt in der Welt nirgends einen echten Kreis. Alle Kreise, die wir finden können, sind unvollkommen. Sie haben Dellen oder kleine Ecken, nicht alle Punkte auf der Kreislinie haben den gleichen Abstand vom Mittelpunkt (so wie es eigentlich sein müsste). Trotzdem können wir die Idee des vollkommenen Kreises denken.

Es gibt für Platon also zwei Welten: eine Welt der Ideen, die vollkommen und unveränderlich ist und eine Welt des Vergänglichen (unsere Welt).

Zentraler Punkt der platonischen Philosophie ist die Idee des Guten. Das Gute ist Ziel und Ursprung alles Seins, es ist die Idee aller Ideen.

„Das Göttliche aber ist das Schöne, das Weise, das Gute und was sonst derartig ist. Von diesen nun nährt und kräftigt sich der Seele Gefieder am meisten, vom Hässlichen aber und Bösen und was sonst von jenem das Gegenteil ist, schwindet es und vergeht.“

Platon gründete in Athen eine Philosophenschule, die „Akademie“.



Die Schule von Athen, Raffael (1510) (Rom/Vatikan)

Platon ist der linke der beiden Männer in der Mitte. Er zeigt nach oben – zur Welt der Ideen, während Aristoteles neben ihm auf die Erde weist – die Erforschung unserer natürlichen Welt.

→ Welche Wissenschaften kannst du auf dem Bild finden?

Platon legte größten Wert auf Logik. Er trainierte mit seinen Schülern das Definieren und das Beweisen. Die Geometrie spielte im Lehrplan eine wichtige Rolle. Die Beschränkung auf Zirkel und Lineal beim geometrischen Konstruieren geht auf Platon zurück. Euklid war von Platon geprägt.

Es ist zwar vermutlich nur eine Legende, aber sie zeigt jedenfalls die Bedeutung der Geometrie für die Athener Philosophen: Am Eingang der Akademie habe dieser Legende nach gestanden:

„Keiner, der nichts von Geometrie versteht, trete hier ein.“

Die Platonischen Körper

Platon beschäftigte sich sehr intensiv mit Polygonen und Polyedern. Er war fasziniert von diesen „idealen“ Körpern.

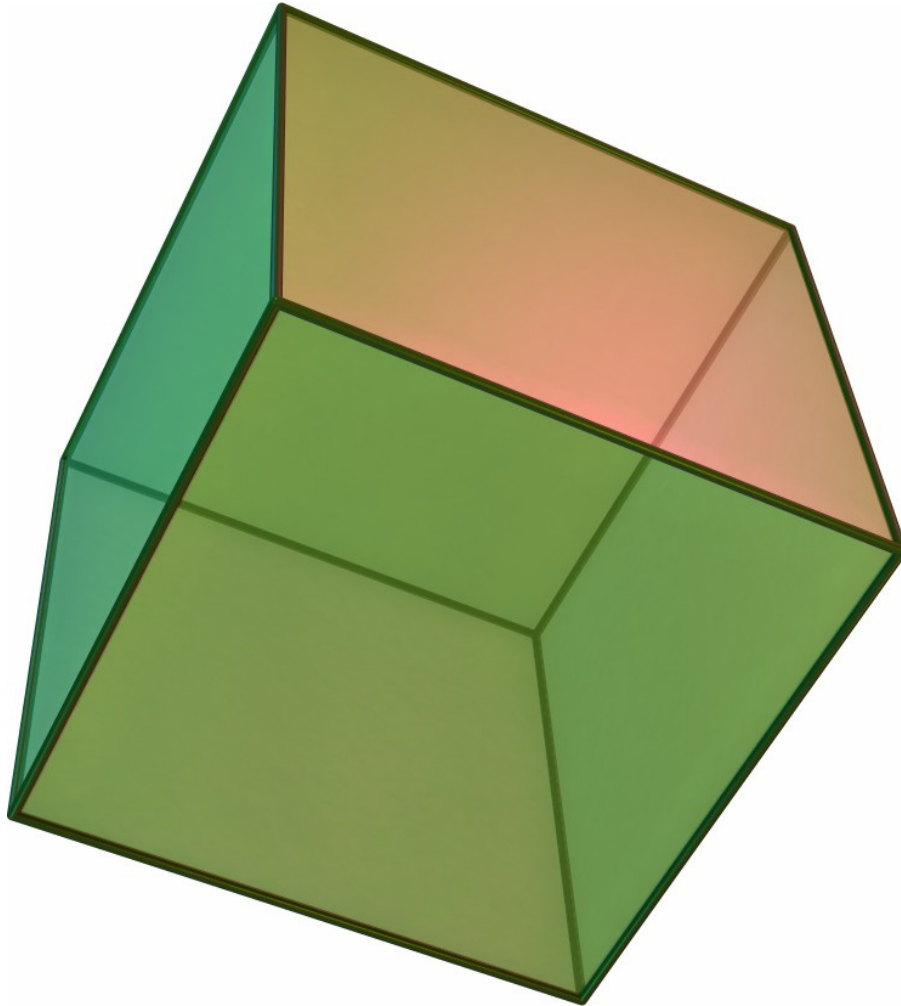
Er beschrieb das Hexaeder, das Tetraeder, das Oktaeder und das Dodekaeder. (Der Artikel „das“ klingt für uns ungewohnt, aber es muss tatsächlich so heißen.)

Die griechischen Naturphilosophen stellten sich vor, dass unser Universum aus ganz bestimmten Ur-Teilchen zusammengesetzt sein müsse: aus Erde, Feuer, Luft und Wasser.

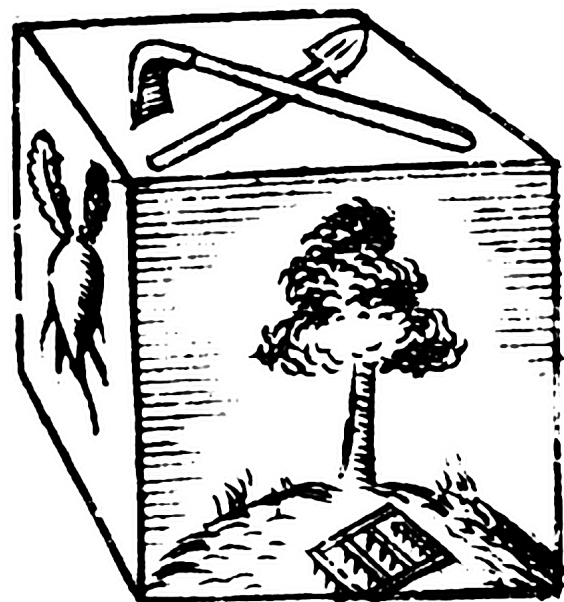
Platon war überzeugt, dass die Welt nur aus perfekten Bausteinen gemacht sein könne – also müssten diese vier Elemente die vollkommensten geometrischen Formen aufweisen, die denkbar sind: eben die platonischen Körper. Er nannte diese Körper deshalb auch „Kosmische Körper“.

Das Hexaeder (hex = 6 Vierecke)

In jeder Ecke stoßen 3 Vierecke zusammen.

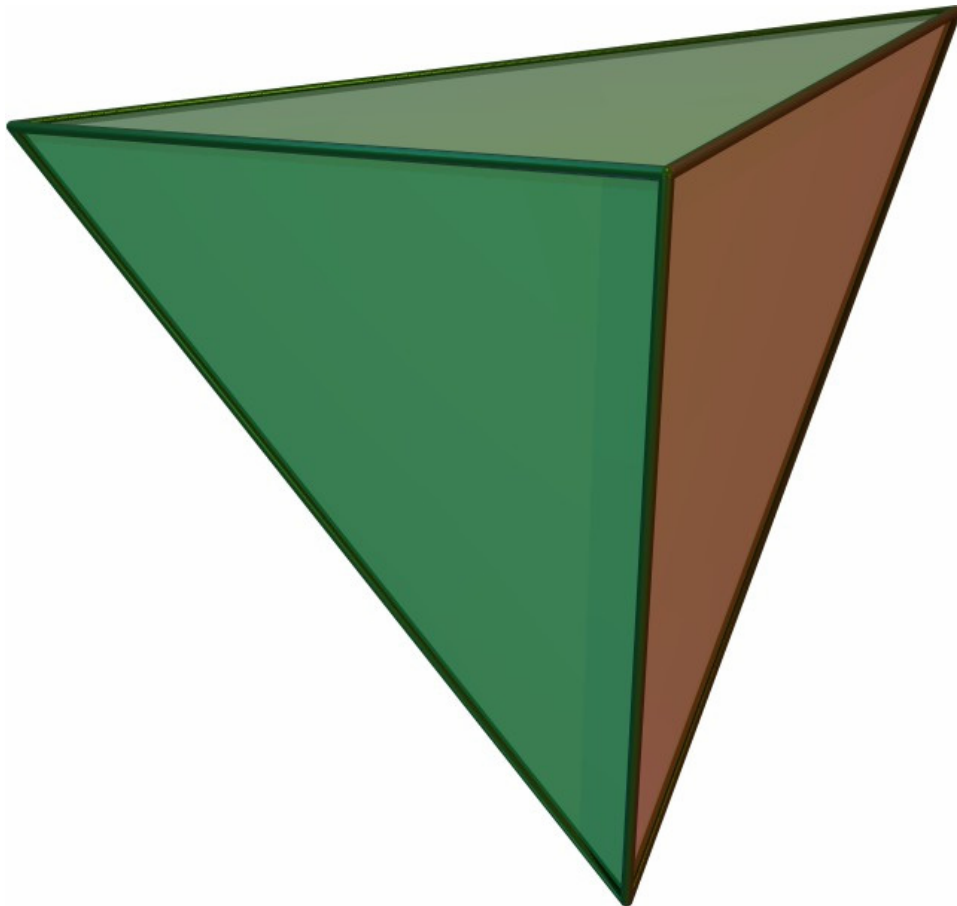


Der *Würfel* oder das *Hexaeder* weist eine besonders stabile Form auf. Es ist ein idealer Boden oder Sockel. Unsere Häuser sind meist auf der rechteckigen Grundform aufgebaut. Platon ordnete diesem Körper das **Element Erde** zu.

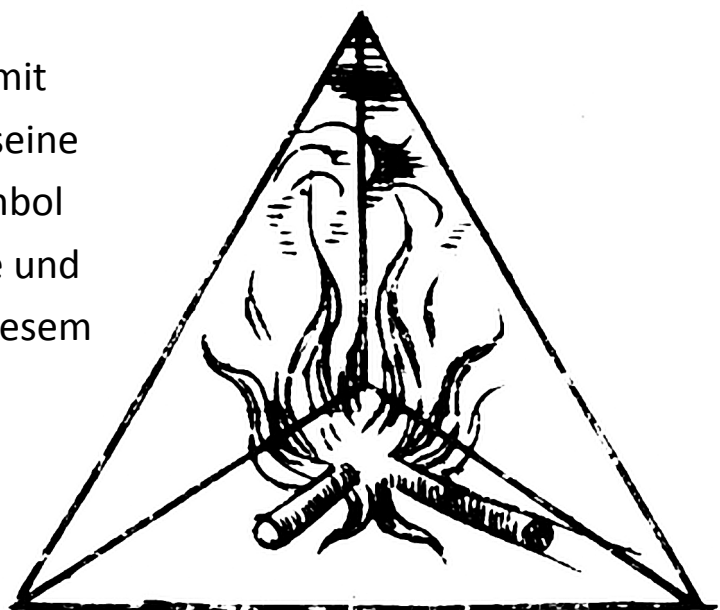


Das Tetraeder (tessara = 4 Dreiecke)

In jeder Ecke stoßen 3 Dreiecke zusammen.

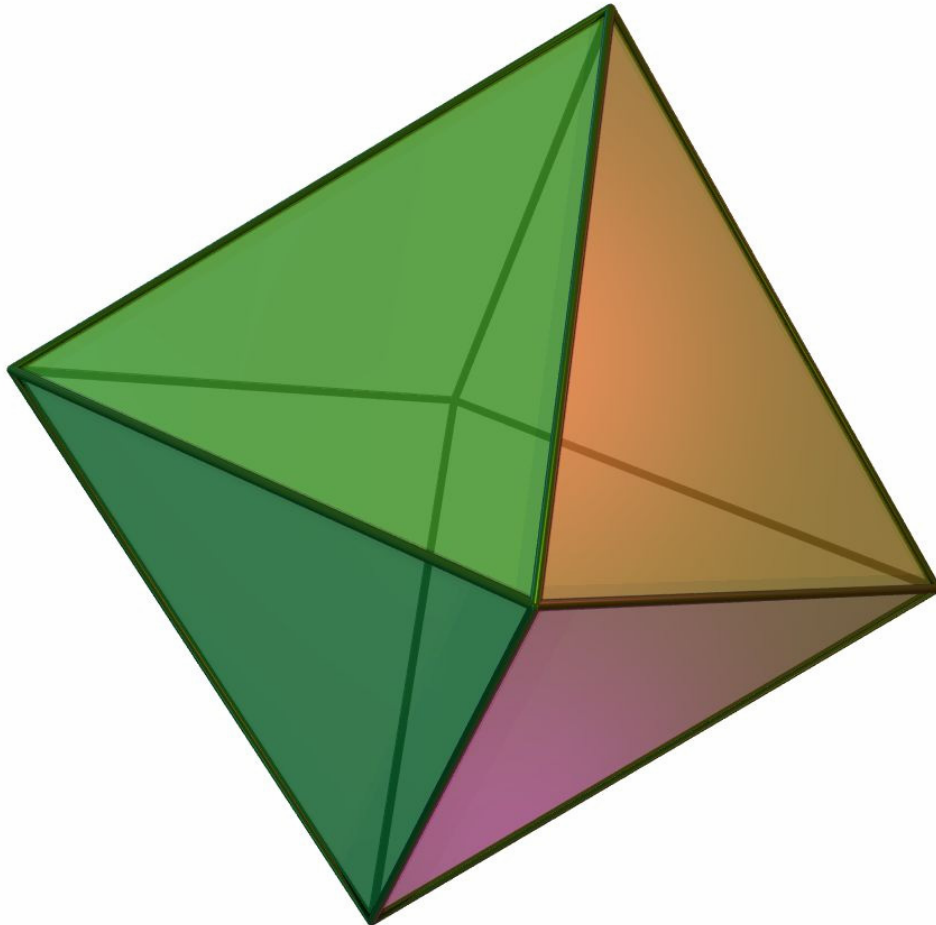


Das *Tetraeder* ist der Körper mit den spitzesten Ecken. Durch seine stachelige Form ist es ein Symbol für die Strahlkraft der Wärme und des Feuers. Platon ordnete diesem Körper das **Element Feuer** zu.



Das Oktaeder (okto = 8 Dreiecke)

In jeder Ecke stoßen 4 Dreiecke zusammen.

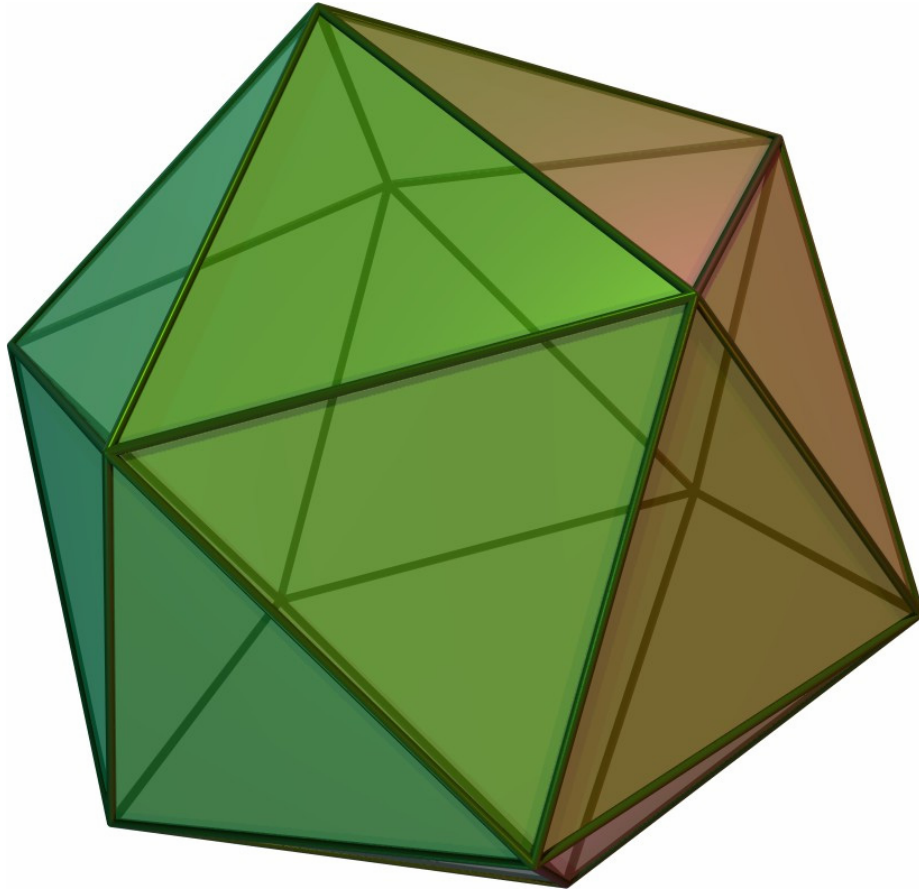


Das *Oktaeder* wirkt weniger spitz als das Tetraeder. Gegenüber dem Würfel ist es weniger geeignet, fest auf dem Boden zu liegen. Hält man es aufrecht in der Hand, so scheint es förmlich zu schweben. Platon hat es deswegen dem **Element Luft** zugeordnet. Seine sechs Ecken entsprechen den vier Himmelsrichtungen sowie den beiden Richtungen Oben und Unten.

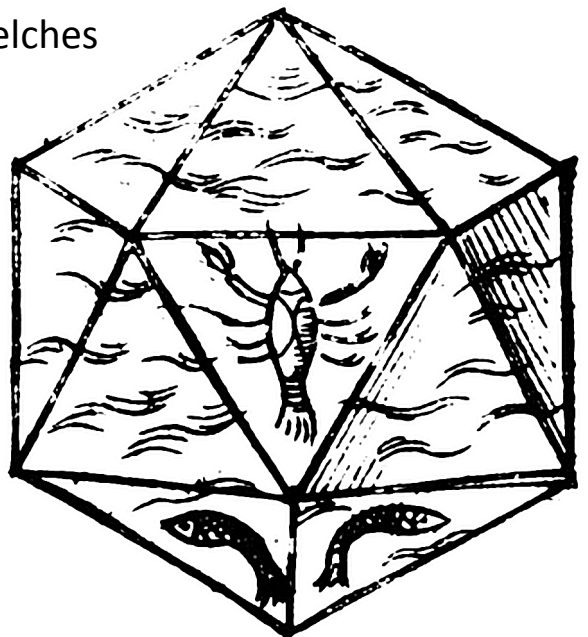


Das Ikosaeder (eikosi = 20 Dreiecke)

In jeder Ecke stoßen 5 Dreiecke zusammen.

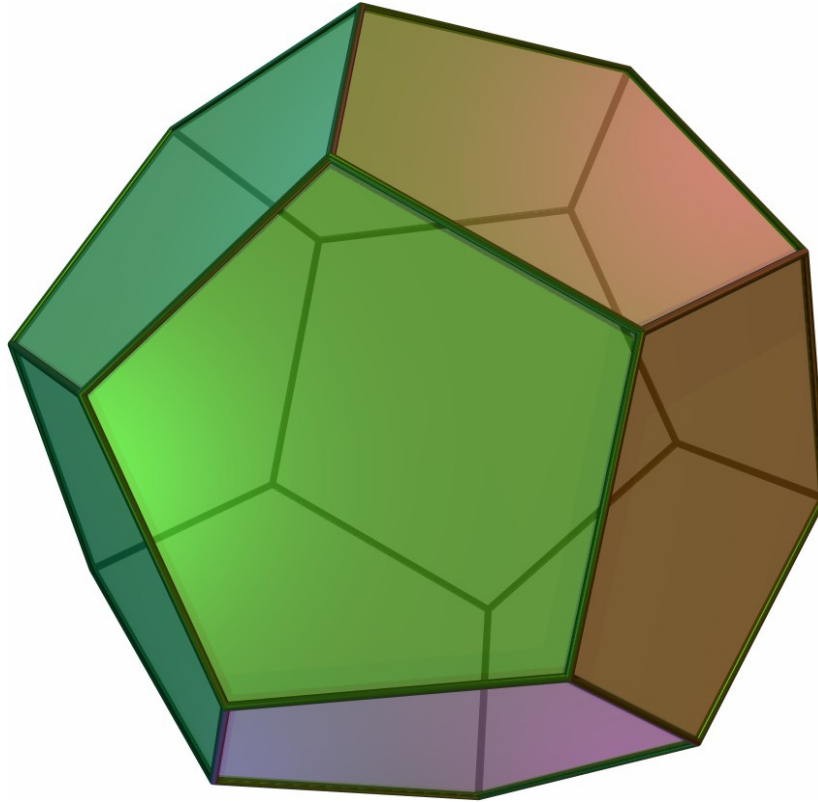


Von allen Körpern, die aus gleichseitigen Dreiecken bestehen, ist das *Ikosaeder* dasjenige, welches sich der Kugelform am ehesten annähert. Flüssigkeiten, auf die keine äußeren Kräfte wirken, streben immer die Kugelform an. Blickt man senkrecht auf eine seiner Flächen, so erkennt man seinen sechseckigen Umriss. Schneeflocken haben eine sechseckige Form. Das *Ikosaeder* wird dem **Element Wasser** zugeordnet.

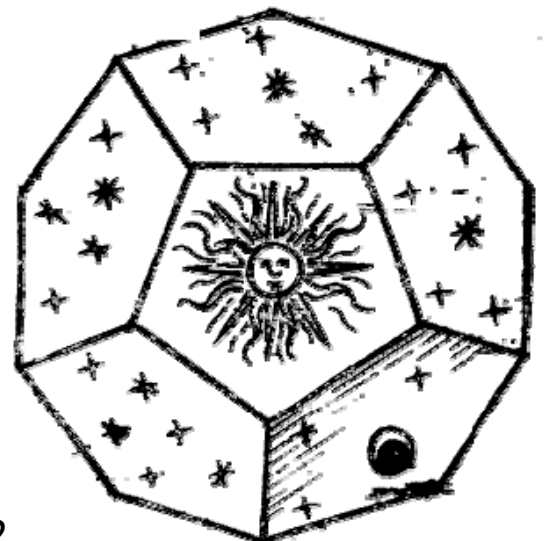


Das Dodekaeder (dodeka = 12 Fünfecke)

In jeder Ecke stoßen 3 Fünfecke zusammen.



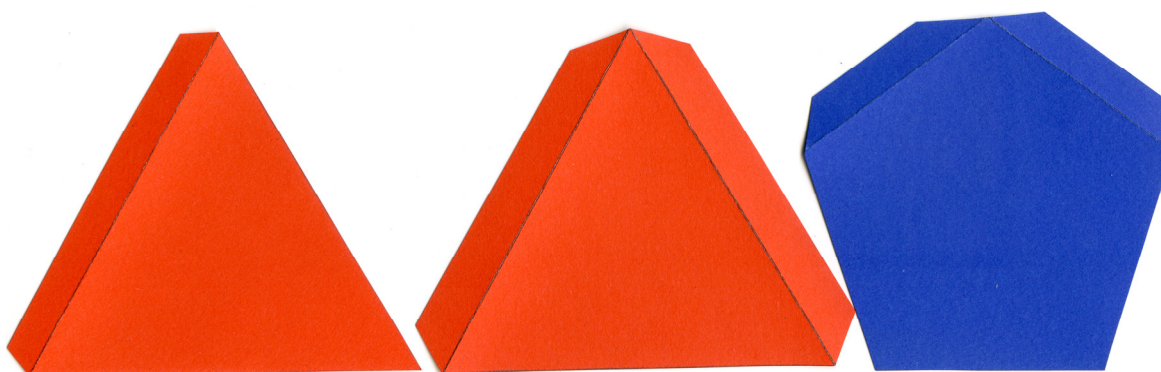
Von allen Körpern wurde das *Dodekaeder* von alters her als der Vollkommenste betrachtet. Er steht der Kugelform am nächsten. Seine Seitenflächen sind Fünfecke, deren Maße durch den Goldenen Schnitt bestimmt werden. In der Schule des Pythagoras war es verboten, über diesen heiligen Körper zu sprechen. Dafür hatte die Athener Schule ein Pentagon als Symbol. Diesem Körper wurde das **Ätherelement** zugeordnet, das das allumfassende Weltall und die göttliche Harmonie meint (auch „*himmlische Quintessenz*“ genannt). Auch die Zwölfzahl spielt eine Rolle: Es gibt 12 Monate und 12 Tierkreiszeichen.



Bauvorschläge

1. Aus Papier

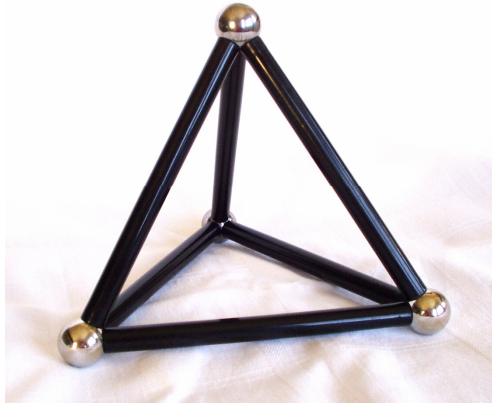
- Verwende farbigen Fotokarton und die Schablonen aus der Geometrischen Kommode.
- Zeichne die Form.
- Lasse beim Ausschneiden bei der Hälfte der Kanten einen Kleberand (etwa 1 cm nach Augenmaß). Beim Viereck an zwei Kanten, bei den Dreiecken abwechselnd an einer und an zwei Kanten, bei den Fünfecken abwechselnd an zwei und an drei Kanten.



- Ritze die Kanten mit Kleberand ein (stumpfes Messer und Lineal). Falze die Klebekanten.
- Verwende flüssigen, schnell trocknenden Papierleim.
- Klebe die Teile nach und nach zusammen, aber so, dass man die ganze Abwicklung immer flach auf den Tisch legen kann. Probiere bei jedem neuen Teil aus, wo es angesetzt werden muss, indem du die Abwicklung versuchsweise zu einem Körper zusammenlegst.
- Es gibt viele Möglichkeiten, wie die Abwicklung zusammengeklebt werden kann.
- Arbeite sehr präzise!

2. Mit Stäbchen

Vielleicht gibt es in deiner Klasse einen Bausatz mit Magnetstangen oder ein anderes Stecksystem mit Stäbchen und Kugeln.



Du kannst auch versuchen, die Körper aus Zahnstochern und Knete zu bauen.

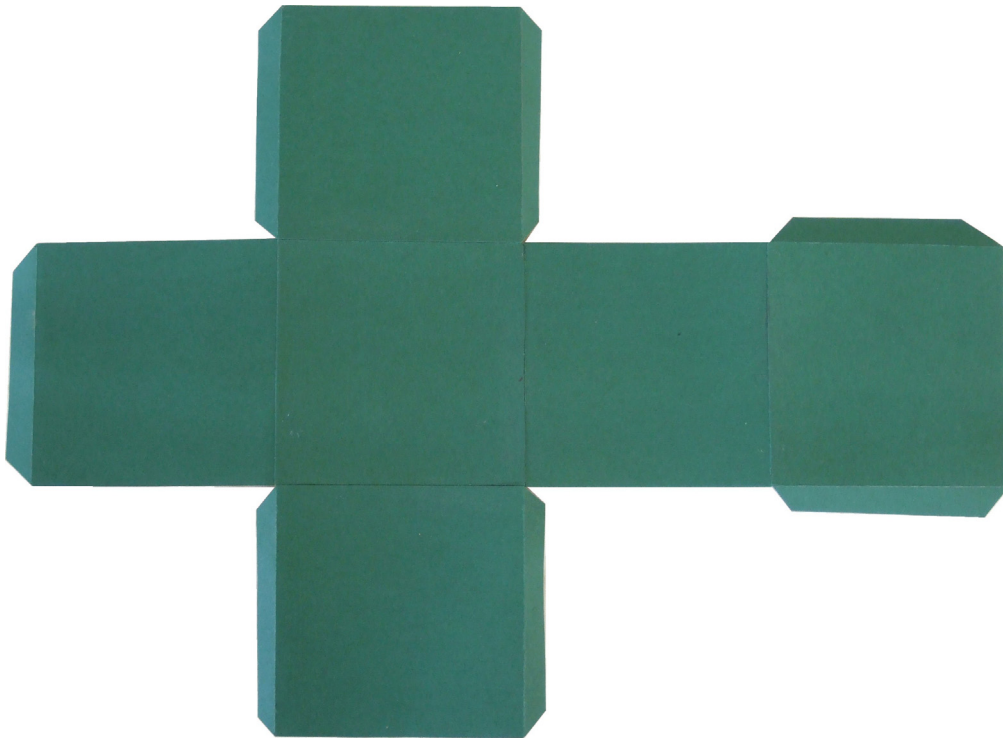
3. Heft mit Beschreibungen

Zeichne die Tabellen für jeden Körper in dein Geometrieheft und fülle sie aus.

(Körper)	
Form der Flächen	?
Anzahl de Flächen insgesamt	?
Anzahl der Flächen, die an einer Ecke zusammenstoßen	?
Anzahl der Ecken	?
Anzahl der Kanten	?

Hexaeder

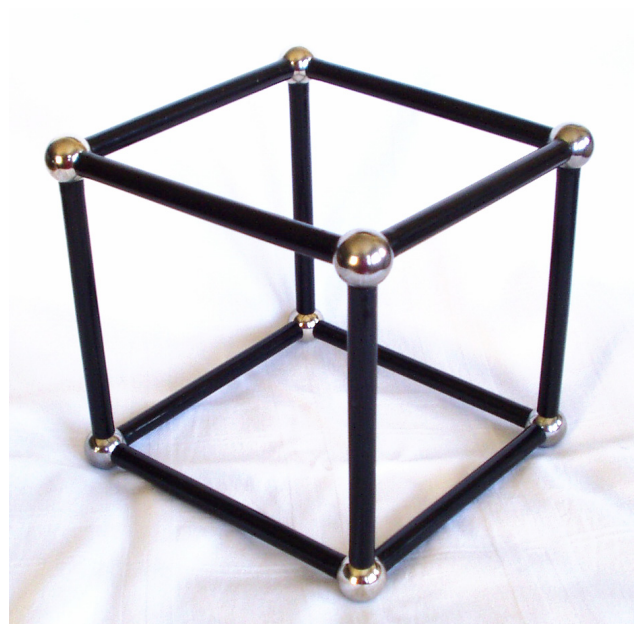
Bauvorschlag Papier – Abwicklung:



Beschreibung:

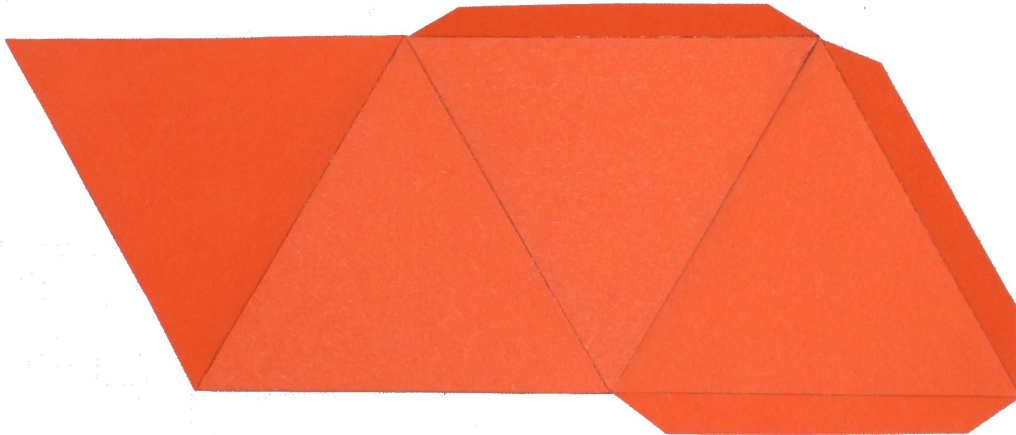
Bauvorschlag Magnetstangen:

(Körper)	
Form der Flächen	?
Anzahl de Flächen insgesamt	?
Anzahl der Flächen, die an einer Ecke zusammenstoßen	?
Anzahl der Ecken	?
Anzahl der Kanten	?



Tetraeder

Bauvorschlag Papier – Abwicklung:



Beschreibung:

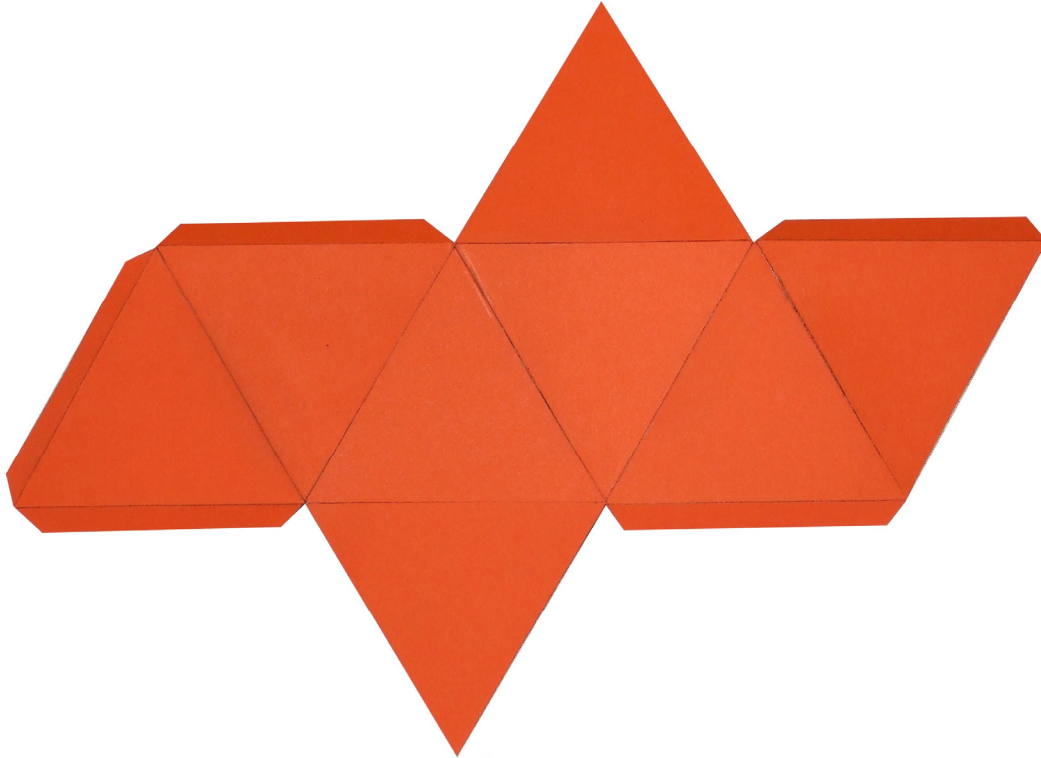
Bauvorschlag Magnetstangen:

(Körper)	
Form der Flächen	?
Anzahl de Flächen insgesamt	?
Anzahl der Flächen, die an einer Ecke zusammenstoßen	?
Anzahl der Ecken	?
Anzahl der Kanten	?



Oktaeder

Bauvorschlag Papier – Abwicklung:



Beschreibung:

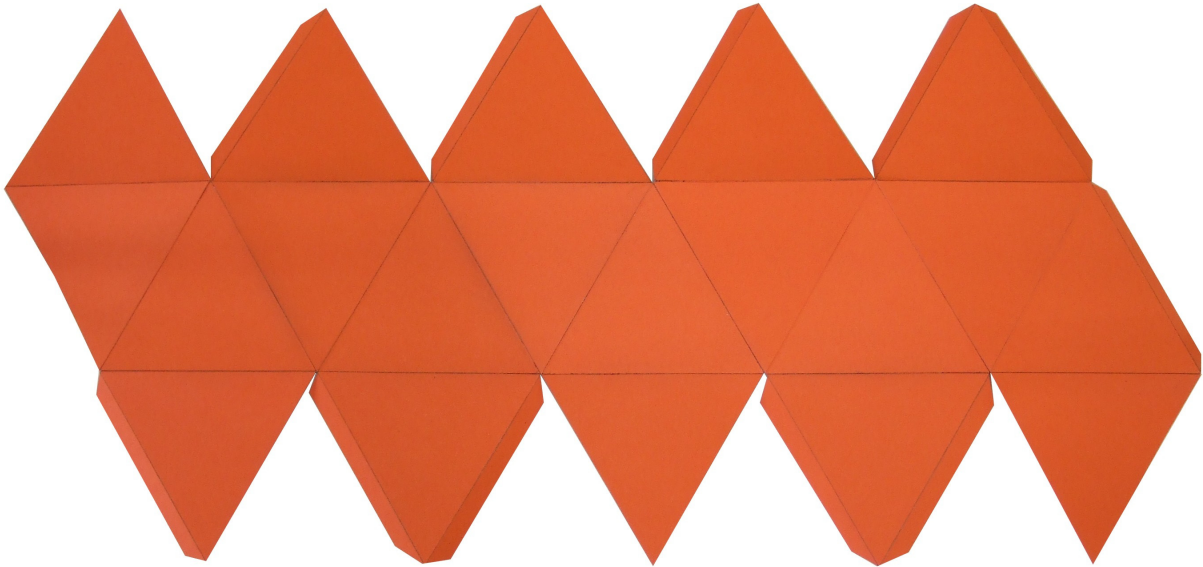
Bauvorschlag Magnetstangen:

(Körper)	
Form der Flächen	?
Anzahl de Flächen insgesamt	?
Anzahl der Flächen, die an einer Ecke zusammenstoßen	?
Anzahl der Ecken	?
Anzahl der Kanten	?



Ikosaeder

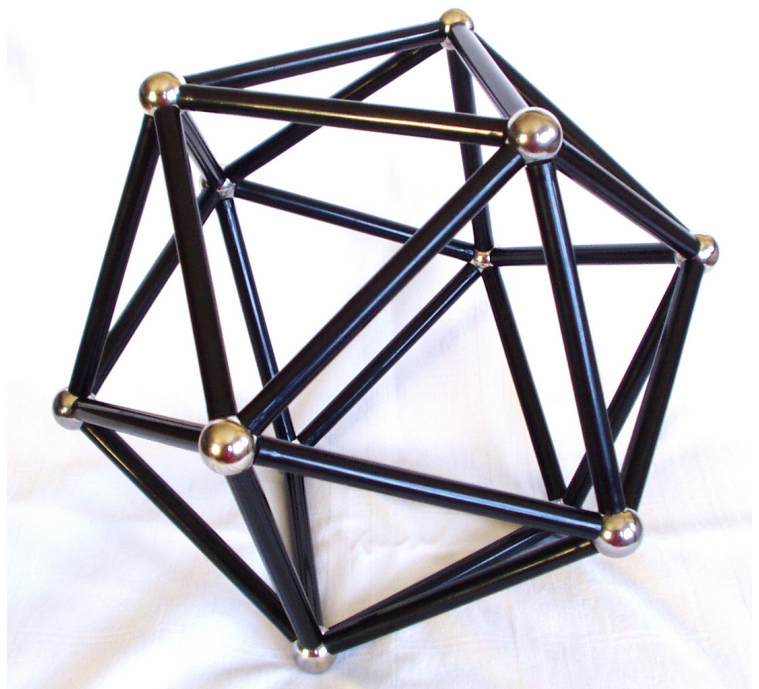
Bauvorschlag Papier – Abwicklung:



Beschreibung:

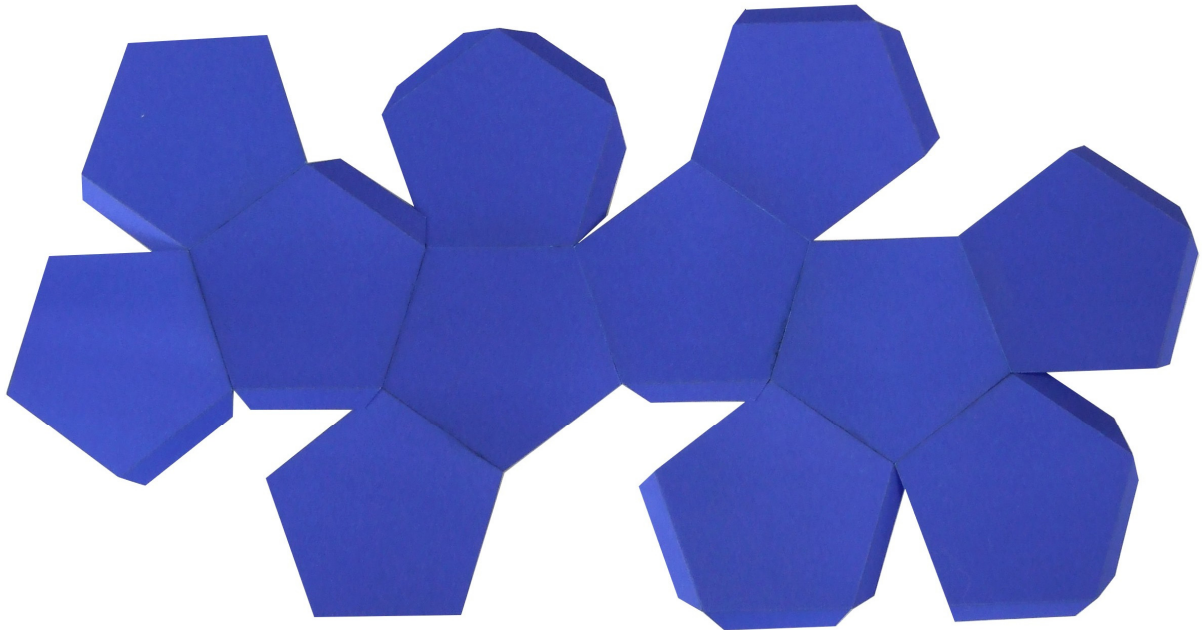
Bauvorschlag Magnetstangen:

(Körper)	
Form der Flächen	?
Anzahl de Flächen insgesamt	?
Anzahl der Flächen, die an einer Ecke zusammenstoßen	?
Anzahl der Ecken	?
Anzahl der Kanten	?



Dodekaeder

Bauvorschlag Papier – Abwicklung:



Beschreibung:

Bauvorschlag Magnetstangen:

(Körper)	
Form der Flächen	?
Anzahl de Flächen insgesamt	?
Anzahl der Flächen, die an einer Ecke zusammenstoßen	?
Anzahl der Ecken	?
Anzahl der Kanten	?

Hier gibt es kein Foto, denn leider ist es mir bisher nicht gelungen ein Dodekaeder mit den Magnet-Stangen zu bauen.



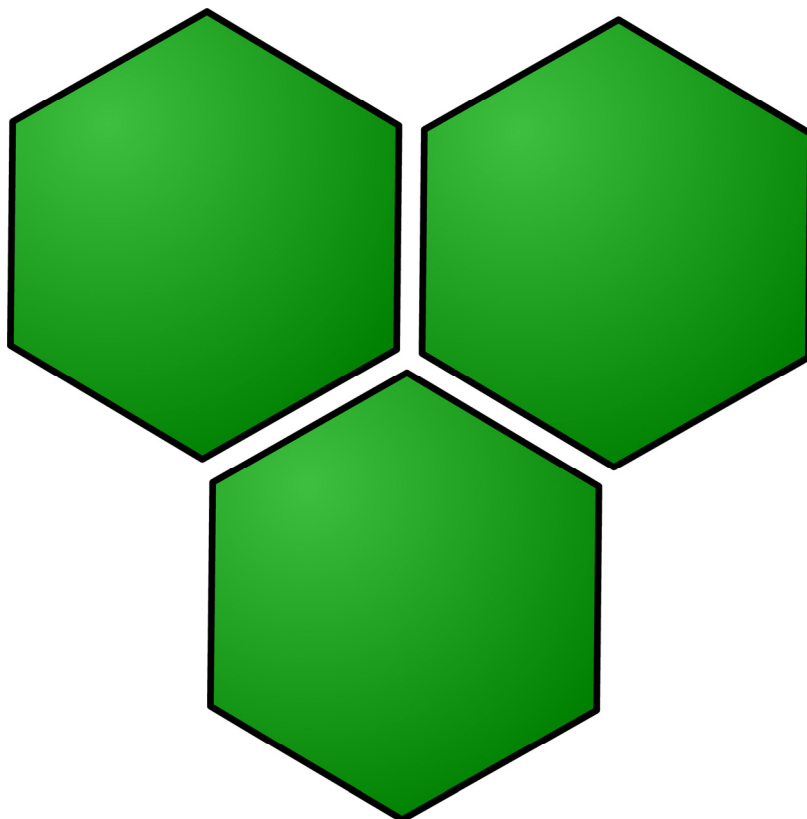
Nur fünf Platonische Körper?

Platon beschrieb zunächst nur vier Körper. Das Ikosaeder wurde später von seinem Schüler Theaitetos beschrieben und konstruiert.

Sollte es nicht noch mehr Platonische Körper geben? Zum Beispiel ein Körper aus vier Vierecken oder vier Fünfecken in einer Ecke? Oder ein Körper aus Sechsecken, Siebenecken usw.?

→ **Probiere es selbst aus:**

Schneide mehrere gleiche Polygone aus (mit Hilfe der Schablonen aus der Geometrischen Kommode; denke an den Kleberand) und versuche Ecken zu bilden, in denen mindestens drei Polygone benachbart sind.



→ **Was stellst du fest?**

Formuliere deine Überlegungen.

Poetisches Rätsel – welcher Körper ist gemeint?

Kopiervorlage

<p><i>Lasst der Formen Sprache sprechen, die in einer Schrift geschrieben, welche uns sich nur entziffert, wenn der Geist zurück sich wandelt, was zur Form sich einst verdichtet.</i></p>	<p><i>Gleicher Höhe, Länge, Breite, rechtgewinkelt jede Seite, zeigt des _____ klare Form klares Maß und klare Norm.</i></p> <p><i>Weit entfernt vom Raum der Kugel, die dem Himmel zu vergleichen, sind des Würfels Kanten, Ecken ganz und gar ein irdisch Zeichen.</i></p> <p><i>Doch die Last der Erdschwere ist des Lebens bester Teil, ist des Menschen beste Lehre und am Ende auch sein Heil.</i></p>
<p><i>Wie der Würfel breit und lastend im Bereich der Schwere ruht, strebt empor das _____ wie die Flamme aus der Glut, schwingt bewegt sich in die Weite, nach der Höhe, in die Breite, und der Kanten strenges Streben ist erfüllt von Kraft und Leben.</i></p>	<p><i>_____, schwebst im Raume schwerelos, fast wie im Träume, ragst du ruhend im Gefilde als kristallenes Gebilde.</i></p> <p><i>Strebst hinaus nach allen Seiten, in die Höhe, in die Weiten, bist verwandt dem Element, welches keine Schwere kennt und als Atem allem Leben seine Kraft vermag zu geben.</i></p>
<p><i>Wenn sich im _____ zwanzig Flächen still berühren, als würden sie die Kugel spüren, fühlen wir die Kräfte walten, die im Wasser sich entfalten, wenn es sich zu Schnee verdichtet und zur Sternenform sich lichtet.</i></p>	<p><i>_____, lass im Raum, den du umschlossen, tastend uns herum bewegen, lass die Flächen deiner Hülle, ihre Kanten, ihre Ecken denkend in den Raum uns wandeln, der zur Kugel weit sich rundet und uns jene Kraft bekundet, die im Anfang alles war und in allem sein wird immerdar.</i></p>

Quelle: Ernst Bindel, in: Paul Adam/Arnold Wyss, Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde, Verlag Freies Geistesleben Stuttgart 1994

Die Platonischen Körper in der Kugel

Die Platonischen Körper haben eine weitere verblüffende Eigenschaft. So wie es für die regelmäßigen Vielecke einen Umkreis gibt, so gibt es für die Platonischen Körper eine **Umkugel**, bei der jede Ecke des Körpers die Kugelschale von innen berührt.



→ **Du kannst es ausprobieren.**

Du brauchst dazu eine transparente Kugel (aus dem Bastelgeschäft) wie auf dem Bild. Die Kopiervorlagen auf den Seiten 24 und 25 passen genau für eine Kugel mit 11,6 cm Innendurchmesser. Bastle damit ein Tetraeder und ein Hexaeder und stelle sie in die Kugel.

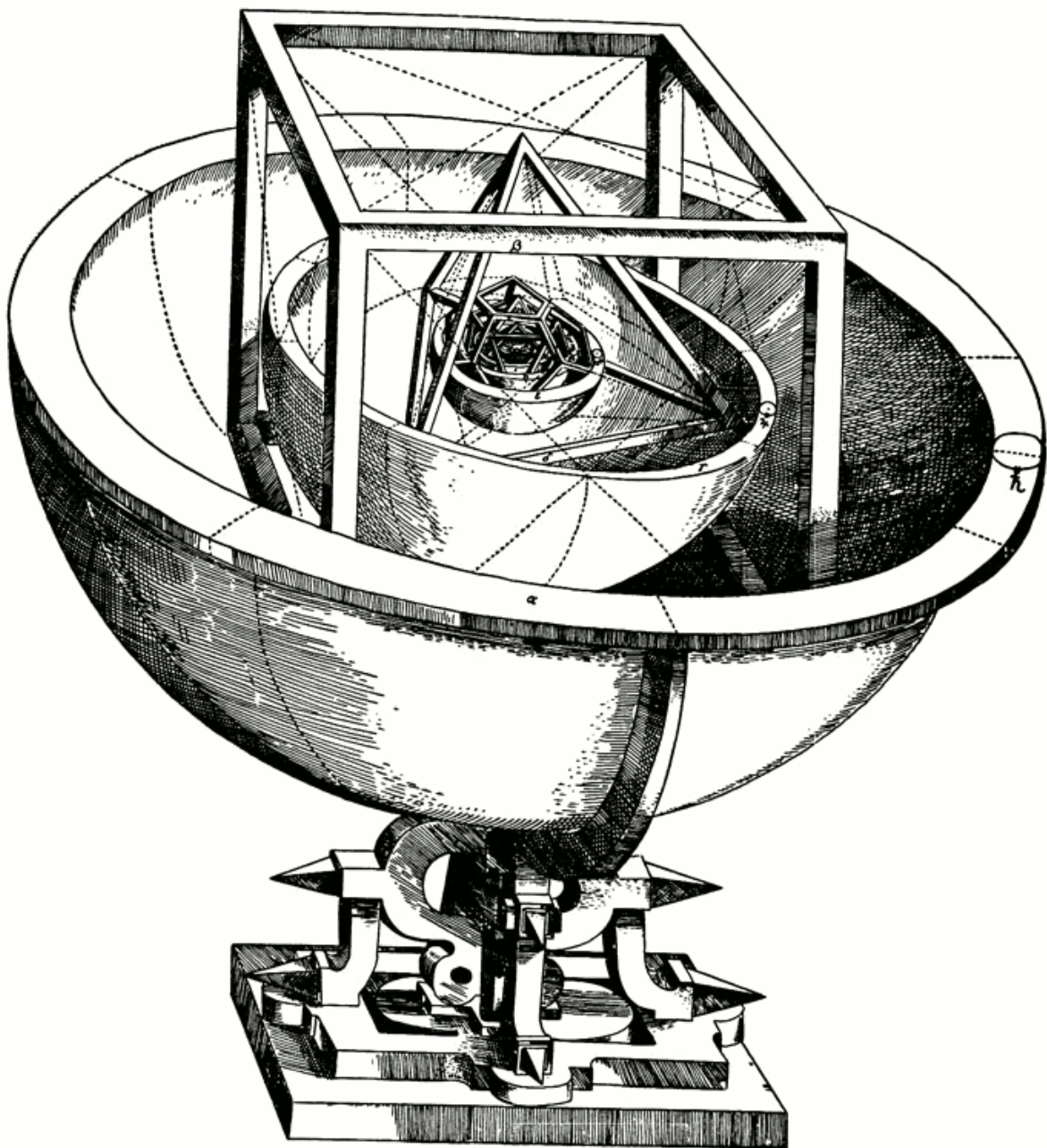
Körper	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Ikosaeder	Dodekaeder
Kantenlänge bei gegebener Kugel (Durchmesser der Kugel mal Faktor)	0,82	0,57	0,7	0,53	0,36

Aber zuvor lade ich dich wieder zu einem historischen Exkurs ins 16. Jahrhundert zu Johannes Kepler ein...

Johannes Kepler – *Mysterium Cosmographicum*

(lateinisch: „Weltgeheimnis“)

Im Jahre 1596 veröffentlichte Johannes Kepler diese berühmte Zeichnung in seinem Buch mit dem Namen „Weltgeheimnis“. Kannst du erkennen, wie die fünf Platonischen Körper ineinander verschachtelt sind, jeweils getrennt von einer Umkugel bzw. einer Inkugel?





Johannes Kepler war ein überzeugter Anhänger des neuen kopernikanischen Weltbildes, nach dem nicht die Erde im Zentrum des Weltalls steht, sondern die Sonne, die von Planeten umkreist wird. Wie aber „funktioniert“ dieses Weltall? Sein ganzes Leben suchte er nach den Gesetzen, die Gott, der große Weltbauermeister, den Bewegungen im Kosmos zugrunde gelegt hatte.

Kepler fragte sich zum Beispiel: Warum sind die Abstände zwischen den Planetenbahnen so wie sie sind und nicht größer oder kleiner? Als er sich einmal mit Geometrie beschäftigte, hatte er eine Idee, die ihn auf eine verblüffende Antwort brachte:

Es gibt sechs Planeten um die Sonne, nämlich Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn. Die Abstände zwischen den Planetenbahnen sind unterschiedlich.

Fügt man nun die Platonischen Körper so zusammen, dass sie jeweils von einer Kugel getrennt werden, ergeben sich Abstände, die erstaunlich genau zu den Abständen passen, die man von den Planeten damals kannte.

Für Kepler konnte das kein Zufall sein. Sein Modell schien eine gute Erklärung für den Kosmos zu bieten. Er war überzeugt, den göttlichen Bauplan für das Weltall gefunden zu haben.

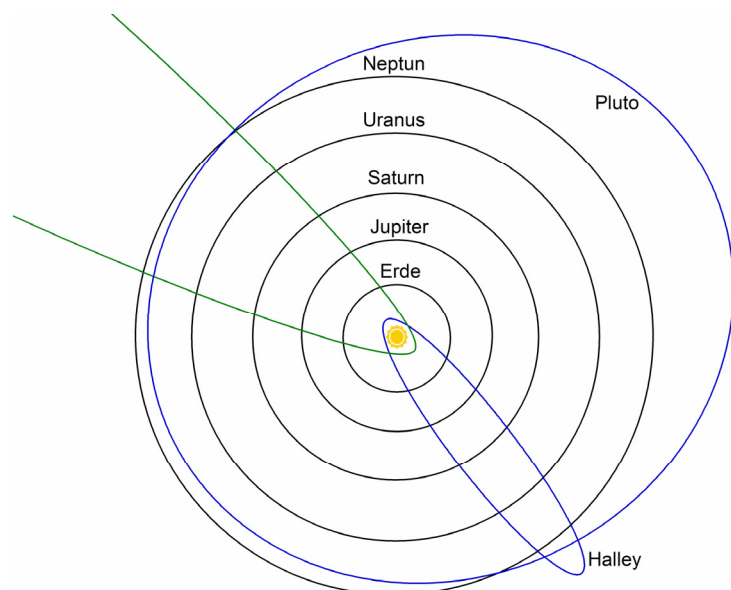
Kepler übertrug sein Modell mit den Platonischen Körpern auf die Planetenbahnen. Die Kugelschale ist dann der Ort (die Himmelskugel), wo der Planet kreist. Die Körper bestimmen den Abstand zur nächsten Planeten-Kugel.

Reihenfolge von außen nach innen:

6. Kugel – Himmelsphäre des Saturn
Würfel
5. Kugel – Himmelsphäre des Jupiter
Tetraeder
4. Kugel – Himmelsphäre des Mars
Dodekaeder
3. Kugel – Himmelsphäre der Erde
Ikosaeder
2. Kugel – Himmelsphäre der Venus
Oktaeder
1. Kugel – Himmelsphäre des Merkur
Im Zentrum die Sonne

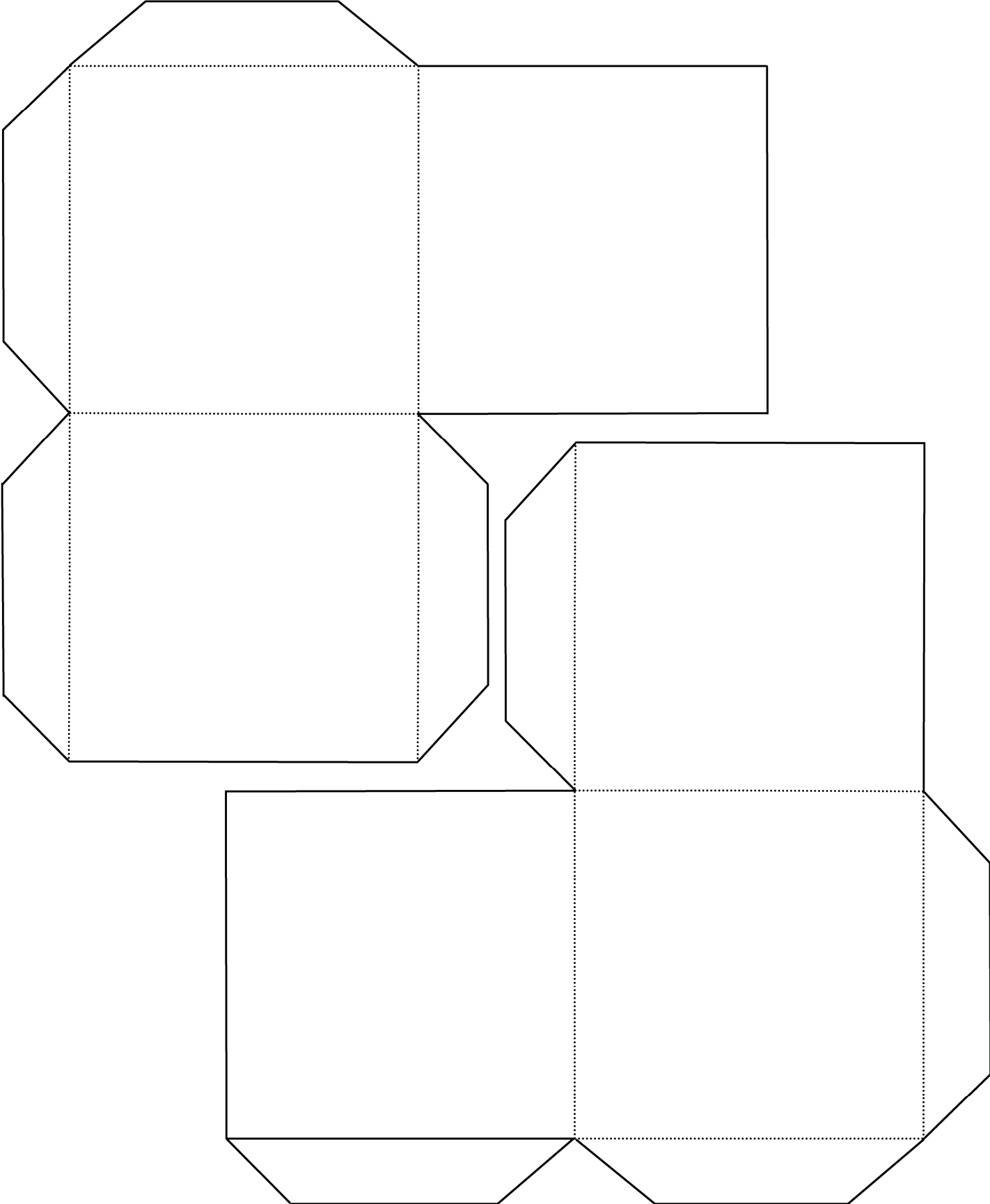
Kepler hielt lange an dieser Idee fest. Aber zu seiner Enttäuschung musste er im Laufe der Zeit einsehen, dass sein Modell dann doch nicht zu den Beobachtungen und Messungen in der Wirklichkeit passte. Kepler gab seinen Irrtum zu, weil er ein überzeugter Wissenschaftler war.

Wir kennen heute inzwischen noch weitere Planeten (Uranus und Neptun) und viele andere Himmelskörper, die in ganz unterschiedlichen Bahnen um die Sonne kreisen. Keplers Idee kann heute keine Lösung mehr sein.



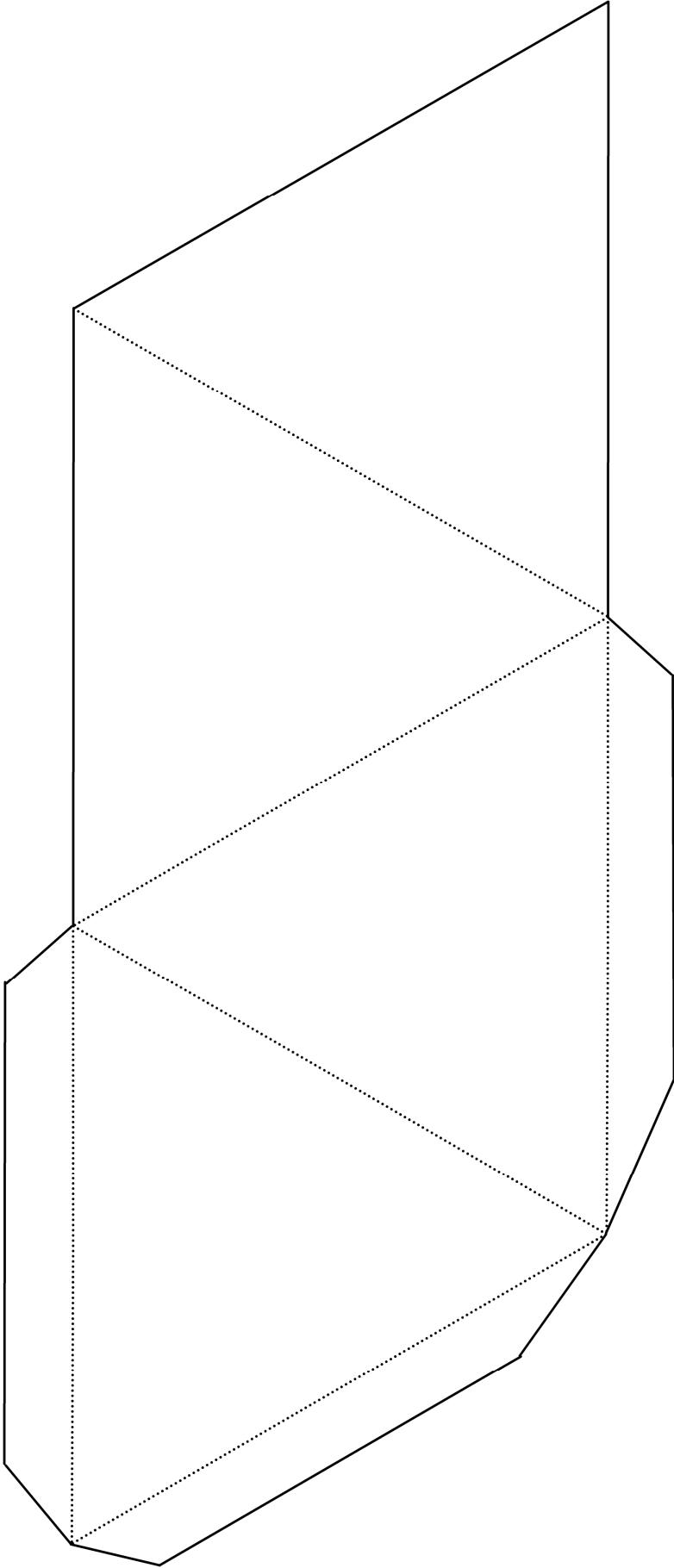
Kopiervorlage

Hexaeder für eine Umkugel (Durchmesser 11,6 cm)



Kopiervorlage

Tetraeder für eine Umkugel (Durchmesser 11,6 cm)

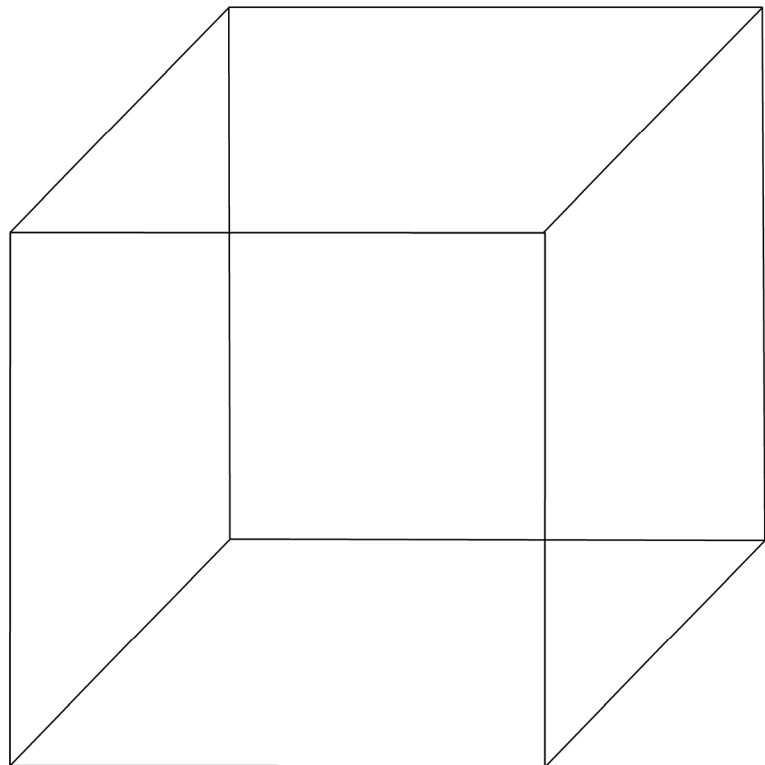


Platonische Körper zeichnen

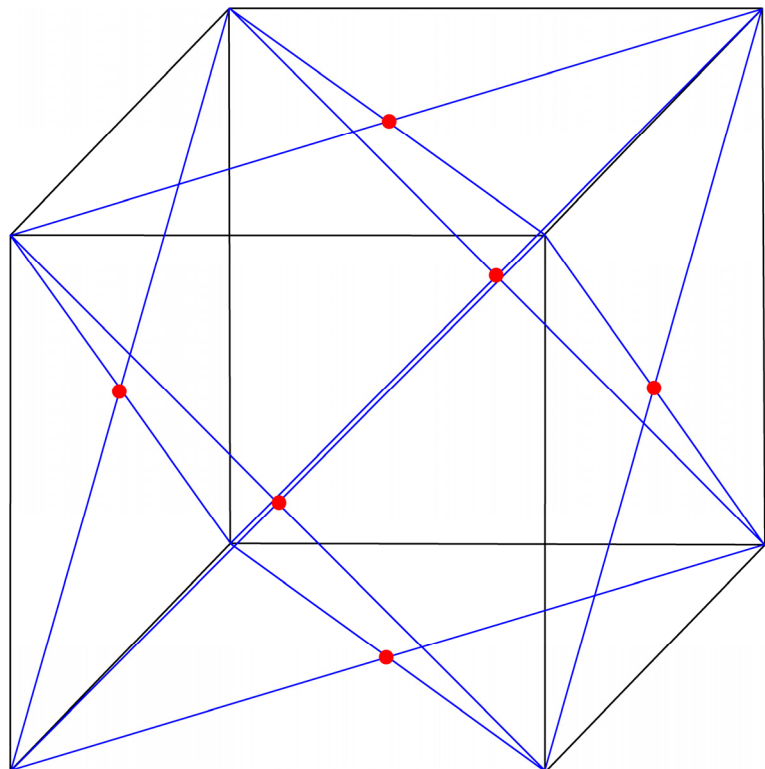
Möchtest du einen Platonischen Körper perspektivisch zeichnen, so dass die Zeichnung räumlich wirkt?

Hier ist eine Anleitung für ein Oktaeder:

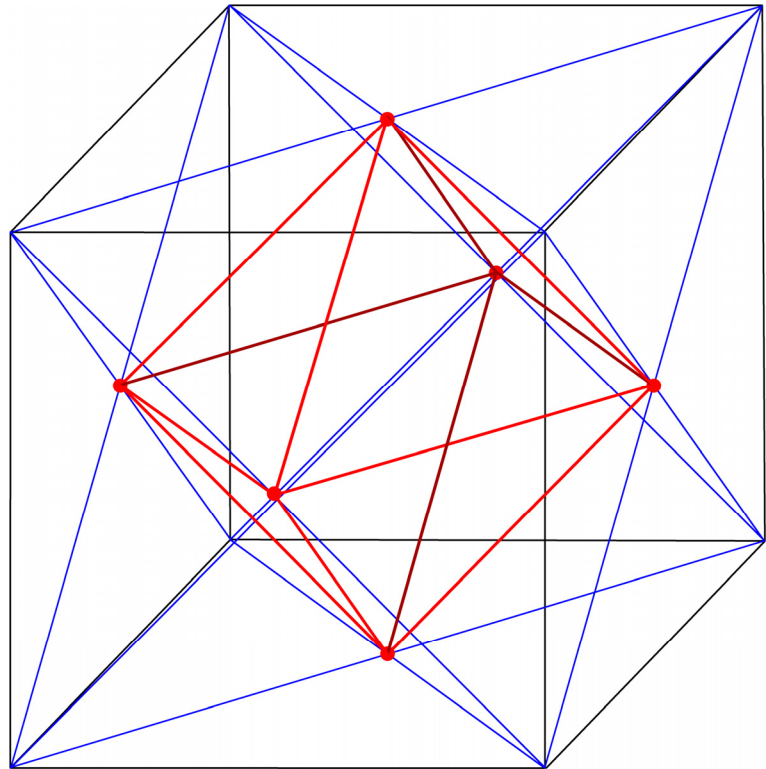
- Beginne mit einem perspektivischen Würfel.
Das ist nicht schwer – du kannst dafür Karopapier verwenden.
Zeichne mit schwachen Bleistift-Linien.



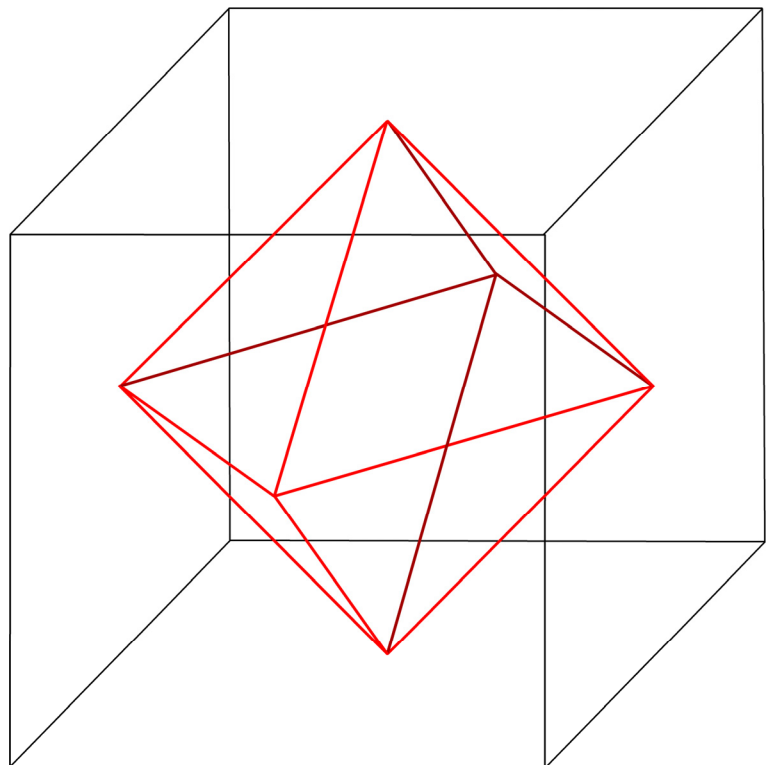
- Zeichne auf jede Würfelfläche die beiden Diagonalen (schwache Hilfslinien).
- Markiere die Schnittpunkte der Diagonalen.



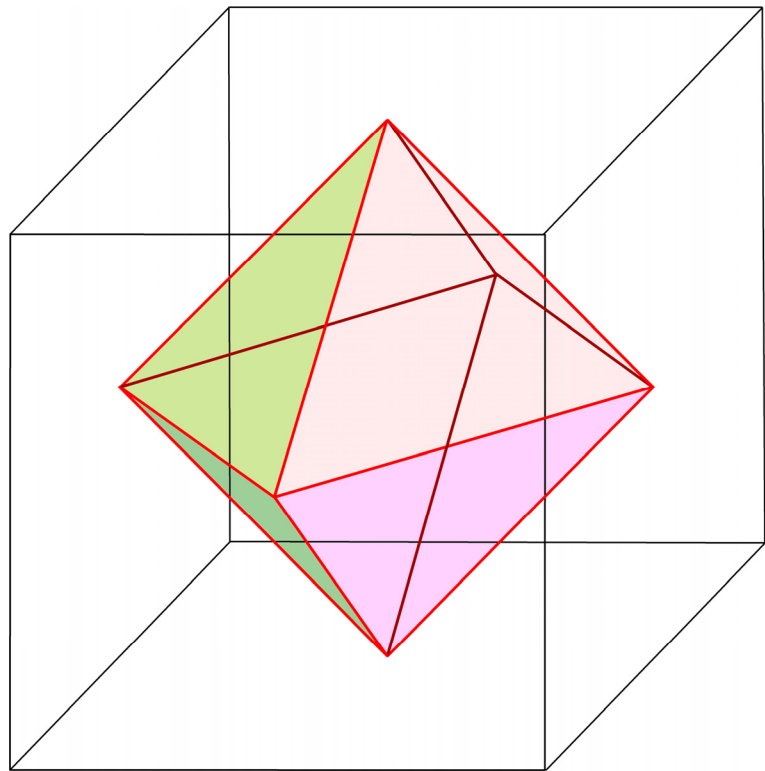
- Verbinde die Schnittpunkte wie auf diesem Bild (kräftige rote Linien).



- Damit hast du das Tetraeder bereits gezeichnet. Auf diesem Bild sind die blauen Hilfslinien entfernt.



- Wenn du möchtest, kannst du die Flächen des Tetraeders mit helleren und dunkleren Farben einfärben. So wirkt die Zeichnung noch räumlicher.



Anmerkung:

Die Grafiken für die räumliche Darstellung der Platonischen Körper auf den Seiten 2 und 6-10 stammen aus Wikipedia unter GNU Free Documentation License.